Heinz Schumann, Weingarten

Raumgeometrisches Beweisen

Raumgeometrisches Wissen ist von Bedeutung für das Verstehen und Modellieren des „Raumes" als ein wesentliches Medium des Menschen; es schließt das raumgeometrische Beweisen ein.

1. Stichwörter zum Thema „Raumgeometrisches Beweisen"

Zur Legitimation des raumgeometrischen Beweisens
Erkenntnistheoretische Legitimierung

- Allgemeingültige Sicherung der durch Exploration gefundenen raumgeometrischen Erkenntnisse (Antwort auf die Frage nach der Richtigkeit)
- Erkärung für die raumgeometrischer Erkenntnisse (Antwort auf die Frage nach dem „*Warum?*")
- Das Beweisen ist eine prinzipielle Arbeitsweise der Mathematik.

Das raumgeometrische Beweisen ist die Voraussetzung für die Bildung von Satzgefügen und damit für die Theoriebildung in der Raumgeometrie.

Curriculare Legitimierung: „*Lernen mathematisch zu argumentieren*" als allgemeine mathematische Kompetenz (das Beweisen kommt in den Beschreibungen dieser Kompetenz leider nur nebensächlich vor). Ebene Geometrie anwenden. Heuristische Strategien üben. Raumvorstellung trainieren.

Idealtypische Beweisarten: Synthetisch-geometrische, analytisch-geometrische (koordinatengeometrische und vektorielle) Beweise, Berechnungsbeweise (inkl. Beweise von und mittels Ungleichungen), Konstruktionsbeweise, Abbildungsbeweise, Beweise mittels Darstellender Geometrie (diese sind heute relativ bedeutungslos, weil diese Art der Geometrie kaum noch vermittelt wird).

Anmerkungen: *Je algebraischer, desto weniger anschaulicher ist ein raumgeometrischer Beweis.*

Der raumgeometrischen Beweisfigur kommt eine zentrale Stellung zu! *Adäquate Beweisfiguren und Beweisentwicklungen werden mittels Interaktiver Dynamischer Raumgeometrie-Systeme im virtuellen Raum konstruiert.*

Einige Beweisstrategien: Analogiebildung (Beweis in der ebenen Geometrie – Beweis in der Raumgeometrie), Figurenergänzung – Figurenzerlegung, Verallgemeinerung – Spezialisierung, Zurückführung auf Aussagen der ebenen Geometrie, Zurückführung auf algebraische Aussagen, Verwendung physikalischer Deutungen. Besonderheit: Räumliches Beweisen von Aussagen der ebenen Geometrie

Generelle Probleme beim raumgeometrischen Beweisen: Es bestehen Mängel bei der Raumvorstellung, bei der Konstruktion räumlicher Beweisfiguren, bei planimetrischem und stereometrischem Vorwissen, bei der Er-

fassung komplexerer raumgeometrischer Zusammenhänge, im grundsätzlichen Umgang mit Beweisen
Anmerkung: Einfache räumliche Aussagen können vorausgesetzt werden. *Keine Beweise für evidente Aussagen!*
Einige Lernhilfen für das raumgeometrische Beweisen: Bereitstellen von Beweisen zum verstehenden Nachvollzug („*Geometrielernen durch Rezeption von Beweisen*"), Beweisfiguren bzw. den Beweisgang beschreibenden Figurenfolgen, „lokalem" Begriffs- und Satzrepertoire, Übungsmaterial (z. B. lückenhafte Beweise, visualisierte Beweisschritte zur Beweisargumentation, mit falschen Beweisschritten versetzte Permutationen von Beweisschritten).
Methodische Einordnung des raumgeometrischen Beweisens
Raumgeometrisches Beweisen ist Bestandteil folgender Methode für die Behandlung raumgeometrischer Sätze (**Schema**):

Behandlungsmethode für raumgeometrische Sätze

1. Satzfindung

1.1 **durch Konstruieren, Messen und Berechnen im virtuellen Raum** (auch als Lösung einer Konstruktions- bzw. Mess- bzw. Berechnungsaufgabe): Entsprechende raumgeometrische Figur konstruieren und analysieren (auch durch Einzeichnen weiterer und Hervorhebung wesentlicher Elemente; durch Messungen und Berechnungen, auch aufgrund von Messungen).
Ergebnis: *erste Vermutung*

1.2 **durch Analogisieren** (insbesondere von ebenen zu räumlichen Aussagen), **Generalisieren**, **Spezialisieren und anderer heuristischer Methoden wie Zerlegen, Zusammensetzen usw**): Entsprechende raumgeometrische Figur im virtuellen Raum konstruieren und analysieren.
Ergebnis: *erste Vermutung*

→ **Vermutung experimentell überprüfen, z. B. durch Formvariation der raumgeometrischen Figur. Ergebnis:** *Erhärtung der Vermutung mit Satzformulierung oder Widerlegung der Vermutung (Gegenbeispiel).*

2. Beweisfindung und - darstellung

2.1 Übernahme der Satzfindungsfigur aus 1. als Beweisfigur
2.2 Analyse des Beweisproblems: Voraussetzungen, Behauptung – Beweisidee
2.3 Wahl der Beweismittel: synthetisch, analytisch (vektoriell – koordinatengeometrisch), abbildungsgeometrisch usw.
2.4 Anwenden heuristischer Beweisfindungsmethoden (wie Vorwärtsbearbeiten, Rückwärtsarbeiten, Zurückführen auf Aussagen der ebenen Geometrie, bekannten Beweis analogisieren bzw.verallgemeinern bzw. spezialisieren usw.)
2.5 Dokumentation des Beweises unter dem Aspekt der Nachvollziehbarkeit

Schema

2. Drei Beispiele für raumgeometrisches Beweisen

Aus Platzgründen kann die getroffene Auswahl nur einen sehr kleinen Ausschnitt aus der Vielfalt an Beweisen in der elementaren Raumgeometrie (vgl. u. a. Schumann 2010) wiedergeben.

Beispiel 1 (Regelmäßiges Oktaeder)
Zwei zueinander senkrecht stehende Strecken, die einander halbieren, sind die Diagonalen eines Quadrats (**Abb. 1**).
Räumliches Analogisierung
Drei paarweise zueinander senkrecht stehende Strecken, die einander halbieren, sind die Diagonalen eines regelmäßigen … (**Abb. 2**)**.**
Beweis mittels den Aussagen: Gleichschenklig-rechtwinkliger Dreiecke mit kongruenten Katheten sind einander kongruent. Die spitzen Winkel eines gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecks betragen jeweils *45°*.

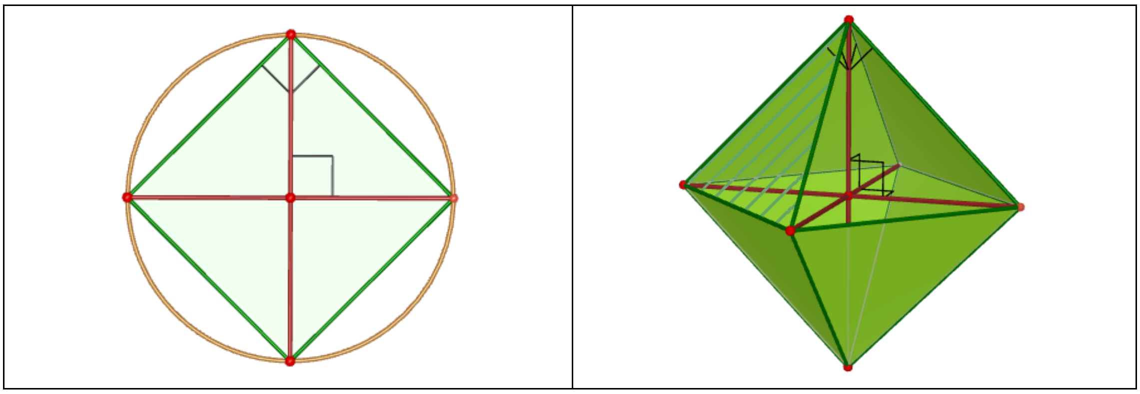

Abb. 1 - 2

Beispiel 2 (Umkugel-Hexaeder aus Vierecken)
Auf eine Kugel legen wir vier Punkte A, B, C, D, die nicht alle auf demselben Kreis liegen, und konstruieren durch A, B, C bzw. A, B, D bzw. B, C, D jeweils einen Kreis (**Abb. 3**). Auf den Kreis ABC legen wir den Punkt E, auf den Kreis ABD den Punkt F und auf den Kreis BCD den Punkt G. Die Kreise BFE, CEG und DFG schneiden einander (!) im noch fehlenden achten Eckpunkt H des Hexaeders, dessen Vierecksseitenflächen nun eingezeichnet werden können (**Abb. 4**, mit dem offenen „Seitenflächenfenster“ ABFD). Aus der Konstruktion ergibt sich folgender Satz: ***Ein Umkugel-Sechsflächner aus Vierecken ist eindeutig bestimmt durch eine räumliche Ecke aus drei Sehnenvierecken.***

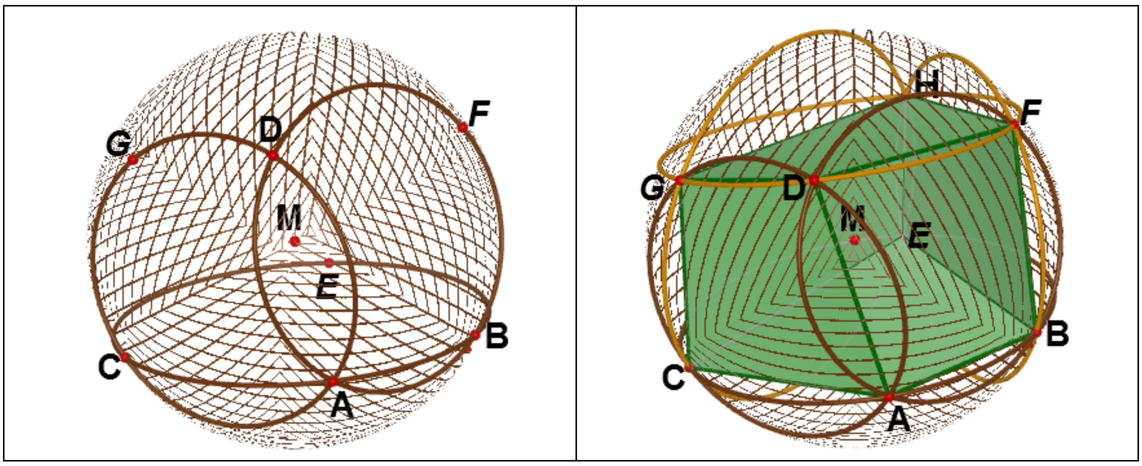

Abb. 3 - 4

Es ist zu zeigen: Wenn von acht Ecken eines Hexaeders ABCDEFGH aus Vierecken sieben auf einer Kugel liegen, dann liegt auch die achte Ecke auf der Kugel. – Zurückführung des Beweisproblems auf eine Aussage der ebenen Geometrie: Beispielsweise liegen ABCDEFG auf einer Kugel. Wir legen nun um A einen Spiegelungskugel, deren Radius beliebig sein kann. Bei Spiegelung an dieser Kugel geht die Umkugel von ABCDEFG in eine Ebene über, in der die Bildpunkte B', C', D', E', F', G' liegen (**Abb. 5**); A wird in den unendlich fernen Punkt abgebildet. Dabei werden die Kreise ABEC, ABFD, ADGC auf die Geraden B'E'D', B'F'D', D'G'C' abgebildet. Die drei Kreise BFE, CEG, DFG werden zu den Kreisen B'F'E', C'E'G, D'F'G'. Diese Kreise schneiden einander im Dreieck B'D'C' nach dem leicht zu beweisenden Satz von Miquel für Dreiecke. Also schneiden auch die drei auf der Umkugel von ABCDEFG liegenden Originalkreise einander.

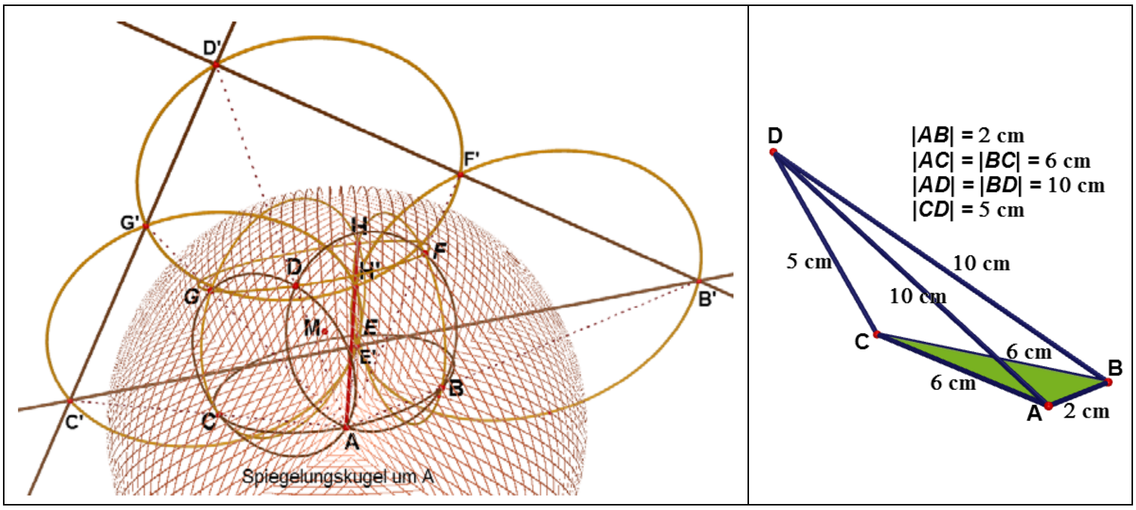

Abb. 5 - 6

Beispiel 3 (Eine Ungleichung für die Kanten eines Tetraeders)

Wie man leicht nachprüfen kann (**Abb. 6**), ist folgende Aussage im Allgemeinen falsch: *Die Summe von vier Kanten eines Tetraeders ist stets größer als die Summe der zwei übrigen Kanten.* Aber es gilt: ***Die Summe der Kanten zweier Gegenkantenpaare eines Tetraeders ist stets größer als die Summe der Kanten des dritten Gegenkantenpaars.***

Beweis: Beispielweise wählen wir die Gegenkantenpaare AD, BC; BD, CA. Mit der Dreiecksungleichung folgt:

$|BC| + |AC| > |AB|$, $|BC| + |BD| > |CD|$, $|AD| + |AC| > |CD|$, $|AD| + |BD| > |AB|$.

Die Addition der zwei ersten und der zwei letzten Ungleichungen liefert

$2(|BC| + |AD| + |AC| + |BD|) > 2(|AB| + |CD|)$.

3. Literatur

Schumann, H.: Eine Einführung in die Raumgeometrie. Erscheint 2010 bei Franzbecker, Berlin und Hildesheim – und die dort angegebene Literatur.