Fritz SCHWEIGER, Salzburg

Die Algorithmen von Poincaré, Brun und Selmer

Einer der bekanntesten Algorithmen ist der euklidische Algorithmus. Man gehe aus von zwei reellen Zahlen $a_0 > 0$ und $a_1 > 0$ mit $a_0 \geq a_1$. Dann bilde man $\delta(a_0, a_1) = (a_0 - a_1, a_1)$ und ordne bei Bedarf um. Ist also $a_0 - a_1 > a_1$, so setze man $a_0' = a_0 - a_1$ und $a_1' = a_1$, andernfalls $a_0' = a_1$ und $a_1' = a_0 - a_1$. Bald hat man diesen Algorithmus beschleunigt, indem man die Subtraktion durch eine Division ersetzt hat, also aus dem Paar (a_0, a_1) das Paar $\sigma(a_0, a_1) = (a_0 - ka_1, a_1)$ bildete. Dabei ist $k \geq 1$ die größte ganze Zahl, so dass dann noch $a_0 - ka_1 \geq 0$ gilt. Dann ist automatisch $a_1 \geq a_0 - ka_1$ und es erfolgt in jedem Fall eine zyklische Umordnung. Es ist sehr praktisch vom heutigen Standpunkt aus, hier Matrizen zu verwenden und den Algorithmus zu beschreiben in der Form

$$\begin{pmatrix} a_0' \\ a_1' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix}.$$

Alle wichtigen Rekursionen können aus dem Produkt von Matrizen hergeleitet werden. Vor allem sind es die Näherungsbrüche, die damit bequem dargestellt werden:

$$\begin{pmatrix} p_{n+1} & p_n \\ q_{n+1} & q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_n & p_{n-1} \\ q_n & q_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Wie man leicht einsieht, bricht dieser Algorithmus genau dann ab, wenn das Verhältnis $a : b$ rational ist. Ferner ist offensichlich der Algorithmus homogen, das heißt, das Paar (x_0, x_1) und das Paar $(\lambda x_0, \lambda x_1)$ führen auf denselben algorithmischen Verlauf. Schon den Griechen war bekannt, dass geometrische Verhältnisse zu periodischen Algorithmen führen können. Die Standardbeispiele sind der Goldene Schnitt und die Wurzel aus 2. Letztlich kann man auf den berühmten Satz von Lagrange hinweisen.
Die Idee der mehrdimensionalen Kettenbrüche hat mindestens zwei Wurzeln (siehe dazu auch Schweiger 2006). Es sind dies der Versuch, den erwähnten Satz von Lagrange über quadratische Irrationalitäten zu verallgemeinern (hier ist C. G. Jacobi zu nennen) und die Frage nach Approximationen eines n-tupels reeller Zahlen durch rationale Zahlen mit gemeinsamem Nenner. Interessanterweise ist die zweite Frage auch mit Musiktheorie verbunden. Verschiedene Vorschläge mehrdimensionaler Al-

gorithmen wurden auch von H. Poincaré, V. Brun und E. S. Selmer gemacht.
Im Jahre 1868 publizierte E. Heine die Arbeit „Allgemeine Theorie der kettenbruchähnlichen Algorithmen, in welchen jede Zahl aus drei vorhergehenden gebildet wird“ die er im Nachlass von G. G. J. Jacobi (1804-1851) gefunden hatte. Seien u_0, v_0, w_0 drei positive Zahlen und seien $l_0 = [\frac{v_0}{u_0}], m_0 = [\frac{w_0}{u_0}]$. Dann setzt er $u_1 = v_0 - l_0 u_0, v_1 = w_0 - m_0 u_0, w_1 = u_0$. Mittels Matrizen erhält man

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -l_0 & 1 & 0 \\ -m_0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}.$$

Natürlich geht es mittels Iteration weiter. Ähnlich wie zuvor, sieht man leicht, dass die Tripel (u_0, v_0, w_0) und $\lambda(u_0, v_0, w_0)$ denselben algorithmischen Verlauf bestimmen.
Jacobi teilt am Schluss seiner Arbeit auch drei Beispiele mit, nämlich $(1, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4})$, $(1, \sqrt[3]{3}, \sqrt[3]{9})$ und $(1, \sqrt[3]{5}, \sqrt[3]{25})$, die alle periodische Algorithmen ergeben. Das letzte Tripel ist aber eine aufwendige Rechnung, denn man findet $(u_7, v_7, w_7) = (u_{13}, v_{13}, w_{13})$. Nun damit stehen wir schon vor einem bis heute ungelösten Problem: Ob das Tripel $(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4}, 1)$ eine periodische Entwicklung hat, ist unbekannt. Die Verallgemeinerung des Satzes von Lagrange ist ein noch offenes Problem.
Leichter lesbar sind etwa die beiden Arbeiten von Viggo Brun „Euclidean Algorithms and Musical Theory“oder „Algorithmes euclidiens pour trois et quatre nombres“. Ein schöner Nachruf auf Viggo Brun ist aus der Feder Scribas erschienen (Scriba 1985).Gegeben sei wieder ein Tripel (a_0, a_1, a_2) mit $a_0 \geq a_1 \geq a_2 > 0$. Man bildet daraus zunächst $\sigma(a_0, a_1, a_2) = (a_0 - a_1, a_1, a_2)$ und ordnet sodann um. Dies führt auf drei Möglichkeiten!

$$a'_0 = a_0 - a_1, a'_1 = a_1, a'_2 = a_2$$

$$a'_0 = a_0, a'_1 = a_0 - a_1, a'_2 = a_2$$

$$a'_0 = a_0, a'_1 = a_1, a'_2 = a_0 - a_1.$$

Natürlich lässt sich dies wiederum mittels Matrizen beschreiben.
Aber nun ist es Zeit, den Zusammenhang mit Musiktheorie aufzudecken, der auch im erwähnten Nachruf von Scriba beschrieben wird. In der sogenannten reinen Stimmung ist das Verhältnis der Frequenz eines Tones

zu seiner Oktave 1 : 2. Für die Quinte findet man 2 : 3 und für die Quarte 3 : 4. Nun will man ein Saiteninstrument bauen, welches innerhalb der Oktave eine feste Zahl von Tönen besitzt. Wenn man an ein Klavier denkt, sind dies 12 Saiten, die im umgekehrten Verhältnis kürzer werden. Man kann hier eine Exkursion in die Geschichte der Musik oder in die Musik anderer Kulturen einschieben. Nun stellen wir uns vor, das Verhältnis zweier aufeinander folgenden Saiten soll eine feste Zahl sein. Wir suchen also eine Zahl λ, so dass

$$\lambda^x \approx 2,\ \lambda^y \approx \frac{3}{2},\ \lambda^z \approx \frac{4}{3}.$$

Dies ist ein Problem diophantischer Approximation, nämlich das Tripel $(\log 2, \log \frac{3}{2}, \log \frac{4}{3})$ durch Tripel ganzer Zahlen anzunähern. Arbeitet man mit Näherungswerten, so findet man etwa die Entwicklung 122010100001.. Die Spalten der entsprechenden Matrizen sind nun die gesuchten Werte (x, y, z). Die Entwicklung 1220101 liefert etwa $(12, 7, 5)$, die Entwicklung 12201010000 die Näherungen $(53, 31, 22)$. Man kann auf ähnliche Weise auch von den drei Verhältnissen Oktave, Quinte und große Terz (5 : 4) ausgehen, also die drei Zahlen $(\log 2, \log \frac{3}{2}, \log \frac{5}{4})$ approximieren und findet das Tripel $(12, 7, 4)$.

In der musikalischen Praxis ist die Näherung $(12, 7, 5)$ von besonderer Bedeutung. Diese entspricht einer Einteilung einer Oktave in 12 aufeinander folgende Tonschritte, deren Frequenzen sich jeweils um den Faktor $\lambda = \sqrt[12]{2}$ erhöhen. Eine Quinte ist in der *temperierten* Stimmung statt durch $\frac{3}{2}$ durch $\lambda^7 \approx 1,498$ gegeben, also etwas „enger“. Dafür ist die Quarte $\frac{4}{3}$ mit $\lambda^5 \approx 1,335$ etwas „weiter“.

Dieser Faktor wird meist anders hergeleitet. Man fordert, dass 7 Oktavenschritte genau 12 Quintenschritte entsprechen. Tatsächlich ist dies in der *natürlichen* Stimmung nicht der Fall, denn 2^7 ist verschieden von $(\frac{3}{2})^{12}$. Es ist $2^{19} = 524288$ und $3^{12} = 531441$. Das Verhältnis $3^{12} : 2^{19} \approx 1,01365$ heißt das Pythagoreische Komma. Setzt man daher die Quinte mit λ^7 an, so erhält man wieder $2 = \lambda^{12}$.

In Norwegisch ist Ernst Selmers Arbeit (Selmer 1961) erschienen, die in einer einfachen Abänderung besteht. Sei $a_0 \geq a_1 \geq a_2 \geq 0$ gegeben. Dann setze man $\sigma(a_0, a_1, a_2) = (a_0 - a_2, a_1, a_2)$. Dieses Tripel wird wieder absteigend geordnet. Selmer berechnet die Entwicklung von $(\log 2, \log \frac{3}{2}, \log \frac{5}{4})$, aber der wichtige Nenner 12 kommt unter den Näherungen nicht vor.

Henri Poincaré hat im Jahre 1884 einen etwas anderen Algorithmus beschrieben. Sei (a_0, a_1, a_2) ein Tripel nichtnegativer reeller Zahlen. Dann gibt es eine Permutation π der Indizes, so dass die Bedingung $a_{\pi 0} \leq a_{\pi 1} \leq a_{\pi 2}$ erfüllt ist. Dann bilde man

$$(a'_0, a'_1, a'_2) = P(a_0, a_1, a_2) = (a_{\pi 0}, a_{\pi 1} - a_{\pi 0}, a_{\pi 2} - a_{\pi 1}).$$

So harmlos dieser Algorithmus aussieht, so steckt er voller schwieriger mathematischer Probleme (Nogueira 1995). Aber entgegen den Hoffnungen Poincarés ist er für diophantische Approximation kaum brauchbar. Man erhält nach einiger Rechnung für das Tripel $(\log 2, \log \frac{3}{2}, \log \frac{4}{3})$ die Näherung $(11, 5, 4)$, aber nicht die musikalisch interessanten Werte $(12, 7, 5)$.

Mehrdimensionale Kettenbrüche könnten ein gutes Thema für den Unterricht sein. Der Zugang verwendet elementare Rechnungen. Dennoch stößt man rasch auf ein ungelöstes Problem. Der Einsatz von Taschenrechnern und Computern ist möglich. Teile von Originalarbeiten können im Schulunterricht vorgestellt werden. Dies kann selbständiges Arbeiten und mathematische Kreativität mit historischen und kulturellen Bezügen verbinden.

Literatur

Brun, V. (1964), Euclidean algorithms and musical theory. *L'Enseignement Mathématique* 10, 125-137

Brun, V. (1957), Algorithmes euclidiens pour trois et quatre nombres. 13ième Congr. Math. Scand. Helsinki, S. 45–64

Jacobi, C. G. J. (1868), Allgemeine Theorie der kettenbruchähnlichen Algorithmen, in welchen jede Zahl aus drei vorhergehenden gebildet wird. *J. Reine Angew. Math.* 69, 29-64

Nogueira, A. (1995), The three-dimensional Poincaré continued fraction algorithm. *Israel J. Math.* 90, 373–401

Poincaré, H. (1884), Sur une généralisation des fractions continues. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér.* A 99 (1884), 1014-1016 = *Oeuvres* V, pp. 185–187

Schweiger, F. (2006), Was leisten mehrdimensionale Kettenbrüche? *Mathematische Semesterberichte* 53, 231-244

Scriba, C. J. (1985), Zur Erinnerung an Viggo Brun. *Mitt. Math. Ges. Hamburg* 11, 271-290

Selmer, E. S. (1961), Om flerdimensjonal kjedebrøk. *Nord. Mat. Tidskr.* 9, 37–43