

FRANZISKA, SIEBEL, Frankfurt

„Und das ist dann halt bei allen Zahlen so.“

Unbekannte, veränderliche und allgemeine Zahlen.

Algebraisches Denken lässt sich mit geeigneten Lernumgebungen auch in der Grundschule fördern. Am Beispiel von Rechendreiecken wird aufgezeigt, mit welchen Aufgaben verschiedene Variablenaspekte gezielt gefördert werden können, ohne dass Variablen mit Buchstabensymbolen eingeführt werden müssen.

Unbekannte, veränderliche und allgemeine Zahlen sind wesentliche Variablenaspekte, die vielfach in der Literatur angeführt werden (vgl. hierzu etwa Drijvers 2003, Siebel 2005). Malle charakterisiert diese Aspekte anhand der Art der Repräsentation von Zahlen aus einem Bereich: Variablen als unbekannte (aber bestimmte) Zahlen lassen sich dem Einzelzahlaspekt zuordnen. Variablen als veränderliche Zahlen (etwa in funktionalen Beziehungen) und allgemeine Zahlen (etwa zur Darstellung von Mustern und Rechengesetzen), lassen sich dem Bereichsaspekt zuordnen, wobei die Zahlen des Bereichs beim Veränderlichenaspekt nacheinander durchlaufen oder beim Simultanaspekt gleichzeitig repräsentiert werden.

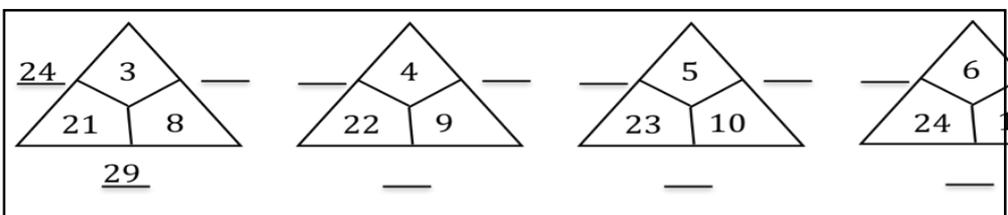


Abb. 1

Die beiden Viertklässlerinnen Sophia und Lisa bearbeiten Aufgaben zu einer operativen Folge von Rechendreiecken (s. Abb. 1). Hieran lassen sich verschiedene Variablenaspekte, die von beiden Schülerinnen genutzt werden, erkennen.

Zunächst berechnen Sophia und Lisa die leeren Felder der Rechendreiecke. Es ist charakteristisch für solche arithmetischen Aufgabenformate, dass der Auftrag „Berechne die leeren Felder!“ nach Einführung des Formats nicht mehr explizit gegeben werden muss sondern leere Felder als implizite Handlungsaufforderung verstanden werden. Vorrangiges Ziel ist es, in jedes leere Feld eine bestimmte Zahl einzusetzen. Dies geschieht bei Aufgaben wie im nebenstehenden Beispiel durch schrittweises Lösen der Aufgabe (vorwärts bzw. rückwärts rechnen). Diese Felder lassen sich wie auch andere Platzhalter als Vorformen von Variablen betrachten: Sie halten den Platz frei für bestimmte, aber zunächst noch unbekannte Zahlen, die hier

unter dem Aspekt des Einsetzens betrachtet werden (vgl. Malle 1993, S. 46).

Nachdem die Mädchen die leeren Felder berechnet haben, vergleichen sie die ausgefüllten Rechendreiecke und benennen, was ihnen auffällt. Sophia:

„Also, da sind immer, bei jedem Dreieck wird eine Zahl immer, geht eine Stelle immer höher. Also 3, beim ersten Dreieck, Rechendreieck isses 3, beim zweiten 4, beim dritten 5, beim vierten 6.“ Kurz darauf fügt sie hinzu „und das ist dann halt bei allen Zahlen so“.

Noch während Sophia redet, korrigiert sie ihre eigenen Formulierungen: Zuerst sagt sie nur 3, dann gibt sie mit *Dreieck* präziser den Ort an, schließlich fasst sie mit *Rechendreieck* genauer die Art des Dreiecks. Mit den Zahlen 3, 4, 5 und 6 beschreibt sie rein verbal, wie im inneren Feld oben ein Zahlbereich in zeitlicher Aufeinanderfolge repräsentiert wird. Dies entspricht dem Veränderlichenaspekt von Variablen (vgl. Malle 1993, S. 80).

Auch im ersten Satz korrigiert sich Sophia während des Sprechens. Dabei wechselt sie zwischen allgemeinen Ortsangaben wie *da* und dem konkreten Objekt *Zahl*. Das Ringen um Formulierungen und der Wechsel zwischen dem konkreten Zahlobjekt und der Einsetzstelle (insb. durch Lageangaben) ist charakteristisch für die weiteren Beschreibungen der beiden Mädchen (vgl. auch Siebel 2010). Sophias Beschreibungsansätze deuten auf einen Dualismus von Variablen als Veränderlichen: Sie stellt einerseits das Regelmäßige durch einen kurzen Ausdruck dar und benennt zum anderen die konkreten Zahlen, die aufeinander folgen.

Sophias Arbeitspartnerin Lisa benennt ebenso ein Muster von Veränderungen. Sie beschreibt für die äußeren Zahlen: „Hier unten, da werden’s immer zwei mehr.“

Für einen Gebrauch von veränderlichen Zahlen, ist es wichtig, Muster von Veränderungen zu erkennen, als auch Zusammenhänge zwischen Mustern zu betrachten und zu begründen. So bietet sich für die Betrachtung von solchen Folgen eine Dreistufung an (vgl. Siebel 2010 und Steinweg 2004):

- Wie verändert sich das? Muster von Veränderungen erkennen und fortsetzen.
- Wie verändert sich das, wenn ...? Zusammenhänge zwischen Veränderung und Wirkung aufdecken und nutzen.
- Warum verändert sich das so? Zusammenhänge zwischen Veränderung und Wirkung beschreiben und begründen.

Während die Mädchen das Muster der Folge der Rechendreiecke zu Abb. 1 beschrieben haben, haben sie zur Folge in Abb. 2 das Muster fortgesetzt, d. h. sie haben die inneren Zahlen des vierten Rechendreiecks dem Folgenmuster entsprechend ergänzt. Die Frage „Was fällt dir auf?“ sowie die Aufforderung, die Folge der Rechendreiecke fortzusetzen, veranlasst die beiden, sich explizit mit der ersten Stufe auseinander zu setzen.

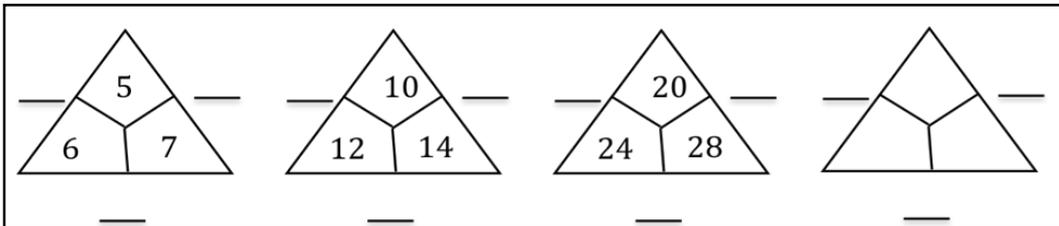


Abb. 2

Um die äußeren Zahlen des vierten Rechendreiecks (Abb. 2) zu berechnen nutzen sie jedoch ausschließlich die Regel für das Bildungsprinzip von Rechendreiecken (Addition der inneren Zahlen) anstatt das Muster der äußeren Zahlen zu nutzen. Die Schülerinnen nutzen keine Zusammenhänge zwischen den Mustern, wie es für die zweite Stufe beschrieben wurde. Allerdings ist dies bei dem gegebenen Zahlenmaterial auch nicht nachteilig. Um zu verdeutlichen, dass es sich lohnt, Zusammenhänge zwischen Mustern zu erkennen und zu nutzen, müsste man anderes Zahlenmaterial für die Aufgabe verwenden.

Die Bearbeitung der weiteren Aufgabenstellungen zur Folge der Rechendreiecke in Abb. 2 trägt zur zweiten Stufe bei, also Zusammenhänge zwischen den Mustern aufzudecken: Die Kinder sollten tabellarisch die Summe der inneren und der äußeren Zahlen festhalten und anschließend die Summen vergleichen.

	RD 1	RD 2	RD 3	RD 4
Summe der inneren Zahlen:	18	36	72	144
Summe der äußeren Zahlen:	36	72	144	288

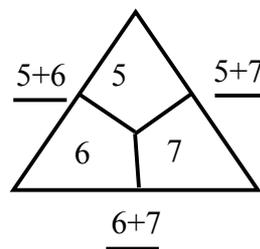
Abb. 3

Lisa und Sophia stellen mit Bezug auf konkrete Zahlen fest, dass a) die Summe der äußeren Zahlen jeweils der Summe der inneren Zahlen des folgenden Rechendreiecks entspricht (diagonal) und b) die Summen der äußeren Zahlen jeweils das Doppelte der Summe der inneren Zahlen sind (vertikal). Die Mädchen decken also erfolgreich Zusammenhänge auf.

Um solche Zusammenhänge auch zur Fortsetzung der Folge oder zur Bearbeitung anderer Folgen angemessen zu nutzen, müssen die Zusammenhänge

ge begründet werden (vgl. dritte Stufe). Für das gegebene Beispiel lässt sich dann feststellen, dass die erste Entdeckung (diagonal) sich nicht auf alle Folgen von Rechendreiecken verallgemeinern lässt sondern nur solche die nach dem Prinzip der Verdopplung aufgebaut sind.

Dagegen trifft die zweite Entdeckung (vertikal) auf alle Rechendreiecke zu. Dies lässt sich anhand verschiedener Darstellungen erläutern. An einem Rechendreieck mit konkreten inneren Zahlen (etwa 5, 6 und 7), deren äußere Zahlen als Term dargestellt sind ($5+6$, $6+7$ und $5+7$), kann man allgemein erläutern, wo und wie oft die inneren Zahlen in die außen stehenden Terme eingehen.



Mit allgemeinen Erläuterungen spricht man die inneren Zahlen als allgemeine Zahlen an. Diese Argumentation lässt sich unterstützen durch Verwendung von Farbkärtchen mit je einer Farbe pro innere Zahl (vgl. Loska und Hartmann 2006)

Durch die Forderung, Zusammenhänge zu begründen, verbinden sich die Variablenaspekte der allgemeinen und der veränderlichen Zahl. Es findet ein Perspektivwechsel statt, im Fall der Rechendreieckfolge wechselt man von der horizontalen Sichtweise (von Rechendreieck zu Rechendreieck) zur vertikalen Betrachtung (von innen nach außen).

Diese Zusammenhänge lassen sich entdecken und begründen ohne Buchstabenvariable zu nutzen. Muster zu beschreiben hilft, sich von konkreten Zahlen zu lösen, und die konkreten Zahlen als Veränderliche oder als allgemeine Zahlen aufzufassen. So werden zentrale Variablenaspekte beziehungsreich und bedeutungsvoll erarbeitet.

Literatur

- Drijvers, P.H.M. (2003). *Learning algebra in a computer algebra environment. Design research on the understanding of the concept of parameter*. Utrecht: Freudenthal Inst.
- Loska, R., Hartmann, M. (2006): Erste Schritte in die Algebra mit dem Rechendreieck. *Grundschule 1*, 36–38.
- Malle, G. (1993): *Didaktische Probleme der Elementaren Algebra*. Wiesbaden: Vieweg.
- Siebel, F. (2005). *Elementare Algebra und ihre Fachsprache. Eine allgemein-mathematische Untersuchung*. Mühlthal: Verlag Allgemeine Wissenschaft.
- Siebel, F. (2010, im Druck). Wie verändert sich das, wenn...? Rechendreiecke und Zahlenketten analysieren. *Praxis der Mathematik in der Schule 52* (33).
- Steinweg, A.S. (2004). Zahlen in Beziehungen – Muster erkennen, nutzen, erklären und erfinden. In Bönig, D., Scherer P. (Hrsg.): *Mathematik für Kinder - Mathematik von Kindern*. Frankfurt: Grundschulverband e.V., 232 - 242