Hendrik SIMON, Köln

Sollte die Multiplikation vor der Addition eingeführt werden? Ideen zum Anfangsunterricht in der Grundschule

Die derzeitige Stoffabfolge im Mathematikunterricht der Primarstufe sieht vor, dass im ersten Schuljahr die Addition und Subtraktion im Zahlenraum bis 20 und im zweiten Schuljahr darauf aufbauend der Zahlenraum bis 100 sowie die Multiplikation und Division eingeführt werden. Dieser Ansatz wirkt zwar angesichts der Peano-Axiomatik plausibel, steht aber in großen Teilen im Widerspruch zu den kognitiven Voraussetzungen des Menschen für das Mathematiklernen und meinen eigenen Erfahrungen in der Arbeit mit rechenschwachen Kindern.

1. Kognitive Voraussetzungen für das Mathematiklernen

Nach Feigenson et al. (2004) verfügen bereits wenige Wochen alte Kleinkinder über zweierlei numerische Fertigkeiten. Einerseits nehmen sie Anzahlen als unterschiedlich wahr, wenn diese mindestens im Verhältnis 2:1 (bei Erwachsenen 8:7) zueinander stehen (sogenanntes erstes Kernsystem), andererseits sind sie dazu in der Lage, Anzahlen von 1, 2 und 3 exakt wahrzunehmen (zweites Kernsystem). Die Rechenarten Addition und Subtraktion betreffend hat Wynn (1992) gezeigt, dass Kleinkinder bei konkreten Situationen (Wegnehmen oder Hinzufügen von Objekten hinter einer Sichtblende) korrekte Erwartungshaltungen bezüglich der Anzahl der Objekte ausbilden, die sich nach der Transformation hinter der Blende befinden müssen, sofern zu keinem Zeitpunkt mehr als 3 Objekte vorhanden waren. Diese Grenze kann überschritten werden, wenn das Kind zwei Gruppen von je zwei Objekten verschwinden sieht („Chunking-Prozesse“, Feigenson & Halberda, 2004).

Der menschlichen Wahrnehmung von Helligkeit und Lautstärke, aber auch anderer Größen, liegt eine logarithmische Skala zugrunde. So werden z.B. Helligkeitsunterschiede als gleich groß empfunden, wenn die Quotienten der zugeordneten Leuchtstärken gleich sind. Näher am Stoff der Grundschule ist die Beobachtung von Opfer & Siegler (2006), dass Kinder in der zweiten Klasse vorgegebene Zahlen auf einem leeren Zahlenstrich logarithmisch verteilt eintragen und nicht linear. So wird z.B. die 500 viel näher an der 1000 markiert als am Anfang des Strahls. Dieser Effekt verschwindet in der Regel im Laufe des dritten Schuljahres.

2. Kognitive Kompatibilität und motivationale Eigenschaften der Rechenarten

Angesichts der kognitiven Voraussetzungen für das Mathematiklernen kann man die beiden Rechenarten „Addition“ und „Multiplikation“ auf verschiedene Weisen miteinander vergleichen.

- Wiedererkennungswert enaktiver oder ikonischer Darstellungen: Die Darstellungen unterschiedlicher Plusaufgaben sind untereinander oft sehr ähnlich und enthalten meist nicht viele innere Querbezüge, die das Arbeitsgedächtnis entlasten und damit die Erinnerung stabilisieren können. Malaufgaben mit Ergebnissen derselben Größenordnung verwenden kleinere Zahlen und entsprechen in ihrer Darstellung oft charakteristischen Mustern oder mehrfach exakt wiederholten Handlungen.
- Kognitive Stabilität des Operators: Wendet man einen additiven Operator auf verschiedene Startwerte an, so scheint dieser sich auf kleinere Zahlen stärker auszuwirken als auf größere. Unsere logarithmische Wahrnehmung lässt den Schritt von 10 zu 15 größer wirken als den Schritt von 130 zu 135. Im Gegensatz hierzu erzeugt eine gleichbleibende Vervielfachung (Anwendung eines multiplikativen Operators) immer eine scheinbar gleich groß wirkende Änderung.
- Kognitive Stabilität des Ergebnisses einer Rechenaufgabe: Die Fehlerrechnung lehrt, dass zwei Additionsaufgaben, die kognitiv gleich erscheinen (erstes Kernsystem), auch gleich wirkende Ergebnisse haben, da auch die Summe innerhalb der erlaubten Abweichung bleibt. Bei der Multiplikation gilt dies nur, falls ein Faktor 1, 2 oder 3 ist (wird exakt wahrgenommen, zweites Kernsystem), ansonsten kann die Abweichung der Ergebnisse ähnlich scheinender Aufgaben größer werden als die geringere Abweichung der Faktoren.
- Kognitive Stabilität der Umkehrung: Bei der Addition ist diese teilweise sehr niedrig, da ähnlich wirkende Aufgaben wie 10-6 und 9-7 deutlich unterscheidbare Ergebnisse haben können. Bei der Division ist die kognitive Stabilität genauso hoch wie bei der Multiplikation.

Es kommen noch zwei Eigenschaften hinzu, die ich als motivationale Eigenschaften bezeichne. Mit motivationalen Eigenschaften eines mathematischen Themas sind solche gemeint, welche die Motivation des Kindes beeinflussen, das Thema zu lernen.

- Kosten-Nutzen-Relation bei Realsituationen: Die Bearbeitung additiver Realsituationen erfordert das Durchzählen zweier Mengen. Die Ergebnisermittlung durch Weiterzählen wäre vom Aufwand her gleich groß, sodass hier Rechnen keinen Vorteil bietet. Anders ist es bei der Multiplikation. Hier muss eine Menge abgezählt werden, die Anzahl gleich großer Mengen bestimmt werden und ein (in der Regel einfaches) Kriterium zur Bestätigung der Anzahlgleichheit der Mengen angewandt werden. Die Möglichkeit, das Ergebnis durch Rechnen zu bestimmen, bedeutet einen echten Vorteil.

- Memorisierungsdruck: Der Vorteil, den das Auswendig-Können von Ergebnissen bietet, ist bei der Multiplikation erheblich größer als bei der Addition. Daher liegen auf Gedächtnisleistung basierende Lösungsstrategien bei der Multiplikation näher.

Wie man erkennen kann, scheint die Multiplikation mit Ausnahme des 3. Punktes (kognitive Stabilität der Rechenaufgabe) diejenige Rechenart zu sein, die besser auf die Voraussetzungen für das Mathematiklernen zugeschnitten ist.

3. Alternative Stoffabfolge für die ersten beiden Schuljahre

Die vorangegangenen Ausführungen haben gezeigt, dass es gute Gründe dafür gäbe, die Multiplikation zur ersten gelernten Rechenart in der Grundschule zu machen. Es bleibt also zu zeigen, dass es mindestens eine sinnvolle Möglichkeit gibt, den Stoff der ersten zwei Schuljahre über die Multiplikation aufzubauen. Im Folgenden wird eine denkbare Stoffabfolge skizziert.

- Am Anfang steht die numerische Auswertung von statischen und dynamischen Situationen im Zahlenraum bis 100.
- Die numerische Auswertung erfolgt zunächst über das Abzählen und das Messen mit natürlichen Repräsentanten. Hierbei wird durch Schulung der auditiven Aufmerksamkeit ein besonderes Augenmerk auf die Zahlwortgrammatik der zweistelligen Zahlen gelegt. Die Kinder halten ihre Ergebnisse zunächst ikonisch oder mit konkretem Material fest. Die symbolische Ebene wird in zwei Stufen angegangen, indem die Kinder zuerst die Zahlen von 1 bis 9 und die Vielfachen von 10 schreiben lernen, später dann alle Zahlen bis 100.
- Dabei werden sowohl unstrukturierte und schwach strukturierte als auch multiplikative Situationen thematisiert, im weiteren Verlauf auch solche, die geringfügig von rein multiplikativen Situationen abweichen.
- Dieses Vorgehen führt zu einer bevorzugten Wiedererkennung von Ergebnissen multiplikativer Situationen, die nachfolgend eingehender untersucht werden. So können multiplikative Situationen gezielt er-

kannt, hergestellt, zueinander in Bezug gesetzt und/oder ausgewertet werden. Die Notation der Multiplikation wird eingeführt. Erste Ergebnisse von Malaufgaben, insbesondere die Vielfachen von 2, 10 und 3 werden automatisiert. Die Division tritt implizit auf.

- Über die Bearbeitung von fast-multiplikativen Situationen werden Addition und Subtraktion als geringfügige Abweichungen größerer Zahlen eingeführt, woraus einerseits die Eigenschaften des dezimalen Stellenwertsystems explizit abgeleitet werden können (an dieser Stelle auch Messen mit genormten Repräsentanten), andererseits aber auch die heuristischen Verfahren zur Addition einstelliger Zahlen, was zu einer schnelleren und sichereren Automatisierung führt.
- Darauf lassen sich die Verfahren zur Addition und Subtraktion zweistelliger Zahlen leicht aufbauen. Die Reihen des kleinen Einmaleins können effektiv hergestellt werden, sodass der Rest des kleinen Einmaleins automatisiert oder schnell aus Kernaufgaben abgeleitet werden kann.

Die geometrischen Themen Kongruenz (von Formen, Figuren und Anordnungen) und Muster (Bandornamente und Flächenornamente erkennen, fortsetzen und selbst entwerfen) unterstützen das vorgeschlagene Curriculum.

Literatur

Feigenson, L., Dehaene, S.,Spelke, E. (2004). Core Systems of Number. *Trends in cognitive sciences, 8(7)*, 307-314

Feigenson, L., Halberda, J. (2004). Infants chunk object arrays into sets of individuals. *Cognition, 91*, 173-190.

Opfer, J., Siegler, R. (2006). Representational change and childrens numerical estimation. *Cognitive Psychology*. doi: 10.1016/j.cogpsych.2006.09.002

Wynn, K. (1992). Addition and subtraction by human infants. *Nature, 358*, 749-750.