

Marie TICHÁ, Praha, Filip ROUBÍČEK, Praha, Jana MACHÁČKOVÁ,
Praha

Zwei geometrische Lernumgebungen zur natürlichen Differenzierung

Der Bedarf, funktionierende mathematische Grundfertigkeiten zu erreichen, stellt hohe Ansprüche an die professionellen Kompetenzen der Lehrer. Dazu gehört auch ihre Fertigkeit die Bedingungen für die Entwicklung der Bildungsvoraussetzungen aller Schüler zu schaffen. Dieser Artikel bringt Informationen über die laufende Forschung.

1. Natürliche Unterschiede, Individualisierung und Differenzierung

Allgemein wurde die Erkenntnis akzeptiert, dass Kinder unterschiedlich lernen, dass sie einen unterschiedlichen Zeitraum benötigen, auch wenn sie den gleichen Stoff unter den gleichen Bedingungen mit gleichaltrigen Mitschülern und mit dem gleichen Lehrer lernen. Deshalb tauchen Bemühungen auf, das Prinzip der Individualisierung des Unterrichts anzuwenden. Individualisierung hängt mit Differenzierung zusammen.

Eine der Formen der inneren Differenzierung ist die *natürliche Differenzierung*. Wir fingen während der Lösung des Projekts Comenius „Motivation via Natural Differentiation in Mathematics“ (NaDiMa) an, uns für die Problematik der natürlichen Differenzierung zu interessieren. Sehr inspirierend für uns waren die Arbeiten von E. Wittmann, P. Scherer und G. Krauthausen (Wittmann, 2001; Krauthausen, Scherer, 2007). Es handelt sich um einen Zugang zur Problematik der Heterogenität im Mathematikunterricht, bei dem die Differenzierung nicht als Problem begriffen wird, sondern als etwas Normales, in einigen Aspekten sogar Zutragliches. Wesentlich ist, dass sich zeigt, dass alle Schüler in der Klasse gleichzeitig am gleichen Inhalt arbeiten, die gleiche Aufgabe lösen können, und zwar auf unterschiedlichen Niveaus gemäß ihren Fähigkeiten.

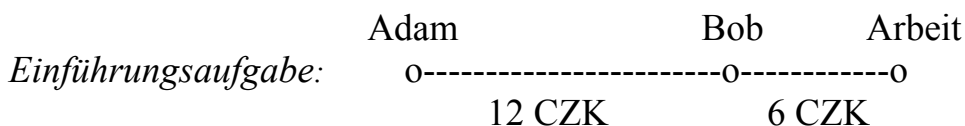
2. Substanzielle Lernumgebungen

Wenn wir die natürliche Differenzierung ermöglichen und unterstützen wollen, müssen wir uns bemühen, eine *substanzielle Lernumgebung* zu schaffen, damit daraus eine solche Aufgabe oder eine solche Task entstehen können, mit der alle Schüler zurecht kommen, auch wenn sie auf unterschiedlichen Niveaus sind (Wittmann, 2001). E. Wittmann wies darauf hin, dass die Suche, Konzipierung und Schaffung von substanziellen Lernumgebungen einer der Bereiche ist, in dem Forscher und Lehrer dauerhaft und systematisch auf ganz natürliche Weise zusammenarbeiten können.

3. Substanzielle Lernumgebung in unserer Arbeit

Ähnliche Gedanken waren die Grundlage unserer Erwägung über das Studium des Prozesses des *Begreifens von Situationen* (Koman, Tichá, 1998). Unter dem Begriff *Begreifen einer Situation* verstehen wir den Gedankenprozess, in dem sich Tätigkeiten durchdringen, die insbesondere auf die Formulierung der Fragen und die Bildung der Aufgaben, die aus der Situation hervorgehen, auf die Lösung der gebildeten Aufgaben und auf die Interpretation der Lösungsergebnisse ausgerichtet sind. Wir bemühen uns um *authentisches Lernen*, um *Kontextkenntnis*, z. B. das Begreifen der Situation, die „Zwei oder mehr Personen in einem Auto“ genannt wird.

Situation: Jeden Tag fahre ich mit meinem eigenen Auto zur Arbeit. Auch meine Kollegen, die in der Nähe wohnen, fahren jeder mit dem eigenen Auto. *Aufgabe:* Wir erwägen, ob und wie wir die Kosten für den Arbeitsweg verringern könnten (näher Koman, Tichá, 1997).

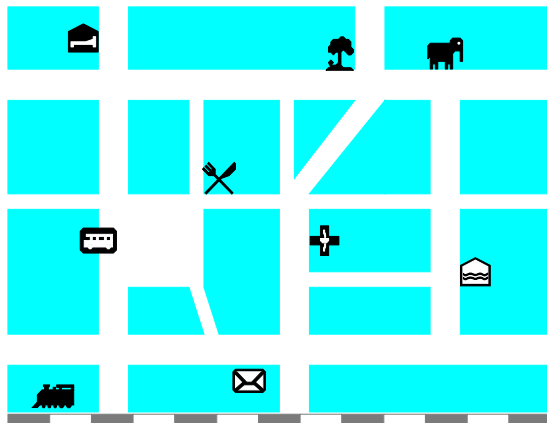


Bald erscheinen die Fragen: *Wie viele Kronen soll Bob Adam geben? Und wie macht man es, damit es gerecht ist?* Hier öffnet sich Raum für die natürliche Differenzierung. Die Schüler und Studenten schlagen in der Regel schrittweise verschiedene Strategien der Kostenteilung vor. Zum Beispiel: zu gleichen Teilen; gemäß der Anzahl der mitfahrenden Personen; im Verhältnis gemäß den Entfernungen; gemäß den Einsparungen. Über die Regeln der Kostenteilung entscheiden die Schüler in einer gemeinsamen Diskussion. Die genannte einfache Situation kann auf viele Arten modifiziert werden, das bedeutet z. B. die Topologie und die metrischen Parameter des Verkehrsnetzes oder die Personenanzahl zu ändern.

4. Arithmetik, Algebra – und was ist mit Geometrie?

Die meisten Arbeiten, welche die natürliche Differenzierung behandeln, mit denen wir uns bekannt machen konnten, bezogen sich auf die Arithmetik oder die Algebra. Im Rahmen der Lösung des Projekts NaDiMa versuchten wir daher, eine substanzielle geometrische Umgebung zu entwerfen, und wir stellten uns die Frage, ob und in welchem Maße es in dieser Umgebung möglich ist, eine natürliche Differenzierung zu realisieren. Wir bereiteten ein Unterrichtsexperiment vor. Wir realisierten eine Pilotforschung und anschließend ein Unterrichtsexperiment (im 4. Jahrgang und den zweiten Teil mit den gleichen Schülern im 5. Jahrgang). Wir entschieden uns für zwei Lernumgebungen, die wir als *Weg* und *Zimmer* bezeichneten. Wir erwarteten, dass diese Lernumgebungen die Notwendigkeit der

klaren Ausdrücke zeigen und die Entwicklung geometrischen Vorstellungen und auch algorithmisches Herangehens unterstützen werden.



In der Umgebung *Weg* arbeiteten wir mit einem idealisierten Stadtplan. Anschließend konzentrierten wir uns auf drei Typen von Aufgaben: (a) die Veranschaulichung eines verbal beschriebenen Wegs im Plan, (b) die verbale Beschreibung eines Wegs, der im Plan eingezeichnet ist, (c) die eigene Wahl eines Wegs und seine Beschreibung.

Dann kommt folgende Aufgabe: Zeichne und Beschreibe den Weg von diesem Ort über jenen Ort zu dem Ort (zum Beispiel: vom Bus in den Zoo oder vom Bahnhof über die Post und die Apotheke zum Zoo). Wir setzten voraus, dass es dank der möglichen Wahl der Schwierigkeit der Aufgabe zu einer Differenzierung der Schüler kommt. Dass die Schüler unterschiedlich „komplizierte“ Wegen wählen und über verschiedene Möglichkeiten nachdenken werden, kombinatorische Erwägungen auftauchen werden. Diese Erwartung wurde aber nur in begrenztem Maß erfüllt. Daher entschieden wir uns für einen neuen Blickwinkel, und in der weiteren Phase unserer Forschung konzentrieren wir uns auf die Differenzierung bei der Bildung von Aufgaben im betreffenden Kontext (Plan). Wir vergaben folgende Task: Ihr wisst, dass in unserer Umgebung in alltäglichen Situationen viele Fragen entstehen. Eine solche Situation, in der Fragen und Aufgaben entstehen können, kann der Plan sein. Beschreibt eine Aufgabe aus dem Umfeld dieses Stadtplans.

Die Schüler bildeten meist die folgenden beiden Aufgabentypen: *Beschreibe den Weg. Wohin gelangst du?* Ganz ausnahmsweise tauchten Aufgaben auf, die eine Andeutung von Kombinatorik enthielten. In den erstellten Aufgaben fanden wir Unterschiede, und zwar bspw. in der Anforderung an die Anzahl von Orten, an denen man vorbeikommen soll; in der Anzahl der Richtungsänderungen; in der Nutzung „schräger“ Verbindungen usw. Wir beobachteten, dass jeder Schüler meist mit großem Interesse arbeitete. Wir können sagen, dass sich diesmal eine natürliche Differenzierung äußerte, dass alle Schüler die vorgegebene Aufgabe gemäß ihren Möglichkeiten erfüllten. In der zusammenfassenden Diskussion beschrieben sie dann ihr Vorgehen und sprachen über ihre Probleme bei der Erfüllung dieser Aufgabe. Sie begründeten ihre Lösungen. Uns erfreute die deutliche Verbesserung in der Struktur und in der Präzision des Ausdrucks.

Das Umfeld *Zimmer* erwies sich insgesamt als geeignete Unterlage für eine natürliche Differenzierung. Dieses Umfeld gibt die Möglichkeit, insbesondere Modellieren eines 3D Raums und der Objekte in 2D, Arbeit mit dem Maßstab, Vorstellungen über geometrischen Abbildungen (z. B. Verschiebungen, Drehungen, Symmetrien). Nach einigen einleitenden Unterrichtsstunden, wurde den Schülern die Task erteilt, den Raum mit Möbeln auszugestalten, wobei es von ihnen selbst abhängt, für wie viele Personen, ob sie das gesamte Möbel verwenden und ähnliches. In der Arbeit der Schüler im Umfeld *Zimmer* verzeichneten wir verhältnismäßig große Unterschiede. Sie betrafen insbesondere unterschiedliche reale Erfahrungen mit dieser Tätigkeit, die Fähigkeit, die Größe des Möbels abzuschätzen (Schätzungen und Messungen), die Vorstellungen von der Größe des (erforderlichen) Raums. Unterschiede gab es bei der Stückzahl der Möbel, der Personenanzahl und ähnliches. Erfreulich war die Bemühung um eine gerechte Anordnung im Fall der Einrichtung des Zimmers für mehrere Personen.

5. Anmerkungen zum Schluss

Bestandteil der Arbeit am NaDiMa Projekt ist auch die psychologische Beurteilung des Vorteils des realisierten Unterrichtsprojekts durch qualifizierte Psychologen. Diese Beurteilung zeigte, dass es bei der Mehrheit der Schüler sowohl zu einer positiven Weiterentwicklung im Rahmen der kognitiven Fertigkeiten und Auffassungsfähigkeiten als auch zu einer stärkeren Motivation zur Mathematik kam. Außerdem kam es zu einer Weiterentwicklung im Rahmen der Selbsteinschätzung in der Mathematik und zu einer insgesamt positiveren Beziehung zur Mathematik. Bei den meisten Schülern kam es zur Erhöhung von einem dieser beiden Motivationsfaktoren zum Mathematiklernen: (a) Mathematik macht Spaß, (b) ich will viel über Mathematik wissen.

Literatur

- Koman, M., Tichá, M. (1997). Alltagssituationen im Mathematikunterricht. Folge 2: Eine Situation aus dem Verkehrswesen. *Mathematik in der Schule*, 35, 11, 590-596.
- Koman, M., Tichá, M. (1998). On Travelling Together and Sharing Expenses. *Teaching Mathematics and its Applications*. Oxford University Press, 17, 3, 117-122.
- Krauthausen, G., Scherer, P. (2007). *Einführung in die Mathematikdidaktik*. München : Elsevier, Spektrum.
- Wittmann, E. (2001). Developing mathematics education in a systemic process. *Educational Studies in Mathematics* , 48, 1, 1–20.

Anmerkung: Diese Untersuchung wurde durch das Förderungsprojekt GACR 406/08/0710 und durch AdW CR Institutional Research Plan No. AV0Z10190503 unterstützt.