Bodo v. PAPE, Oldenburg

„Geht nicht.“ gibt’s nicht. Plädoyer für eine Schulanalysis ohne Scheuklappen

Im Rahmen der Aufgabenstellungen der Analysis liegen einige Fragestellungen nahe, deren Formulierung man in der Schule schlichtweg aus dem Wege geht. Löst man sich von dem unbedingten Bestreben, eine termartige Lösung zu finden, so kommt man in derartigen Fällen leicht zum Ziel mit numerischen Lösungsstrategien. Diese kann man selbstständig auffinden und artikulieren sowie umsetzen in einfache Excel-VBA-Funktionen. Die Anreicherung des Instrumentariums um die zugehörigen numerischen Algorithmen führt zu einer Entlastung der Analysis von überkommenem algebraischem Ballast. Zugleich erfährt die Schulanalysis eine wichtige inhaltliche Bereicherung. (Am Horizont erscheint eine „animierte Analysis“ mit bewegten bzw. kinematisch erzeugten Kurven (Verfolgungskurven, Gelenkkurven)).

1. Der Werkzeugkasten

Bei derartigen Fragestellungen kommt man gut klar mit Hilfe eines Werkzeugkastens von Excel-Funktionen, der sehr beschränkt ist und gut überschaubar. Basis ist ein Suchverfahren nach der „Wanderregel“ zum Finden eines Gipfels in einer Landschaft:

„Sieh dich an deinem Standort um:
Falls in Schrittentfernung nach N, S, W, O das Niveau höher ist,
so begib dich dorthin.
sonst halbiere deine Schrittweite.
Das wiederhole so lange, bis die Schrittweite hinreichend klein ist.“

Überträgt man diese Regel auf das Wandern auf einem Funktionsgraphen, so liefert sie sehr verlässlich die VZW-Stellen, die Extremstellen und die Stellen extremer Steigung in x-Richtung. (Eine Anpassung an spezielle Aufgabenstellungen erfordert in dem zugehörigen Funktionsmakro jeweils eine Abänderung von nur ein oder zwei Zeilen.)

Lässt man sich etwa zur Funktion $f(x) = 2^{\frac{x}{4}} - \frac{x}{2} + 2 \cdot \cos(2x)$ die Nullstellen im Bereich -5...15 in Abhängigkeit von der Startstelle aufzeichnen, so erhält man eine Treppe oberhalb der 1. Winkelhalbierenden. Bei dem – halbalgebraischen! – Newton-Verfahren dagegen zeichnet sich ein Treppe ab, die um die 1. Winkelhalbierende spielt: Gefunden wird jeweils eine Nullstelle „in der Nähe“ der Startstelle. Knapp 20% der Werte sind allerdings Ausreißer, zusätzlich gibt es völlige Abdrifter.

Excel bietet die Möglichkeit, mathematische Funktionen zu definieren ohne die Beschränkung, dass die Werte direkt aus Termen stammen. Die Funktionswerte werden über Algorithmen ermittelt. Die so definierten Funktionen kann man dann aus dem - ohnehin bereits sehr umfassenden - Katalog der mathematischen Funktionen als „benutzerdefiniert“ abrufen.

Diese Option zur Erweiterung des Spektrums an Funktionen wird man als Mathematiklehrer sehr begrüßen. Zur Beruhigung all derer, die auf der Schule den MS-Office-Produkten gezielt aus dem Wege gehen möchten, sei gesagt: Diese Algorithmen lassen sich sämtlich auch in eine Tabellenlösung umsetzen. Ein derartiges Vorgehen liegt sogar nahe bei der Einführung und zum Austesten (Protokollierung des Ablaufs). Andererseits: In der Funktionsschreibweise ist die Beschreibung – als direkte Umsetzung der umgangssprachlichen Artikulation der Vorgehensweise – wesentlich knapper und besser zu durchschauen. Außerdem mangelt es den Tabellenlösungen an Transportabilität.

Excel-WhiteBox „Funktionen zu Analysis“

```
Const genau = 1E-8
Const bis = 1000
Const h = 1E-8

Function f(x)
f = ...
End Function
```

Ableitung

```
Function fstei(x))
fstei = (f(x+h) - f(x)) / h
End Function
```

VZWSuche vorwärts: Wanderregel

```
Function VZWPendel(start)
stelle = start
schritt = 0.1
Do
  stelle = stelle + schritt
  umkehr = f(stelle) * f(stelle - schritt) < 0
  If umkehr Then schritt = -(schritt / 5)
  fertig =  Abs(schritt) < genau Or stelle > bis
  Loop Until fertig
VZWPendel = stelle
End Function
```

Mittelwert / Integral

```
Function fmittel(von, bis, anzahl)
ibreite = (bis - von) / anzahl
stelle = von + ibreite / 2
Do
  summe = summe + f(stelle)
  stelle = stelle + ibreite
  Loop Until stelle > bis
fmittel = summe / anzahl
End Function

Function fintegral(a, b, n)
For i = 1 To n
  fintegral = fintegral + f(a + (i-0.5) * (b-a)/n
  Next
End Function
```

Maximumsuche vorwärts: Wanderregel II

```
Function ftop(start)
schritt = 0.01
stelle = start
Do
  topli = f(stelle) >= f(stelle - schritt)
  topre = f(stelle) >= f(stelle + schritt)
  top = topli And topre
  stelle = stelle + schritt
  If top Then schritt = -(schritt / 5)
  fertig = Abs(schritt) < genau Or Abs(stelle) > bis
  Loop Until fertig
If Abs(stelle) > bis Then stelle = -100
TopP = stelle
End Function
```

Bogenlänge

```
Function fboglen(a, b, n)
dx = (b - a) / n
x = a
For i = 1 To n
  dy = f(x+dx) - f(x)
  dl = (dx^2 + dy^2)^0.5
  fboglen = fboglen + dl
  x = x + dx
  Next
End Function
```

Krümmung

```
Function fkr (x)
dy = f(x + h) - f(x)
dl = (h ^ 2 + dy ^ 2) ^ 0.5
m1 = fstei(x+h)
m2 = fstei(x)
dwin = Atn(m1) - Atn(m2)
fkr = dwin / dl
End Function
```

Excel ist sicherlich kein spezifisches Schultool. Nach den Bildungsstandards der KMK geht es im MU allerdings um „Basisqualifikationen, die für die **weitere schulische und berufliche Ausbildung** von Bedeutung sind und die **anschlussfähiges Lernen** ermöglichen“. Hier ist Excel der 1. Platz unter den Mathematik-Tools kaum zu bestreiten.

Hat man sich im Hinblick auf den Einsatz einer Tabellenkalkulation erst einmal für Excel entschieden, so bietet sich ein weiteres Werkzeug an, und zwar ein kleines Programm, das

- viel Algebra erübrigt,
- die Mathematik animiert.

Zielwertsuche zur Anpassung

```
Sub finde()
[stelle] = 0
schritt = 0.1
Min = 100
Do
  [stelle] = [stelle] + schritt
  krit = Abs([wert] - [ziel])
  umkehr = krit > Min
If umkehr Then schritt = -schritt / 5
  Min = krit
Loop Until Abs(schritt) < 1E-8
End Sub
```

Der Algorithmus folgt dem „Wander“-Schema: Der Wert in einer Zelle „stelle“ wird verändert, vermittelt über andere Zellen ändert sich dann auch der Wert in der Zelle „wert“. Der Wert in dieser Zelle soll dem Zahlwert in der Zelle „ziel“ möglichst nahekommen, vielleicht auch möglichst groß werden („ziel“=100). Excel bietet für derartige Aufgaben selbst ein Werkzeug an, nämlich den Solver. (Ein Algebra-System wird nicht vorgehalten!) Der Solver mag für komplexe Probleme sehr mächtig sein. Im Bereich der Schulmathematik erweist er sich als undurchsichtig, schwer handhabbar und zudem unzuverlässig. Das Finde-Makro ist im schulischen Bereich schon deswegen vorzuziehen, weil es eine Möglichkeit bietet, die Darstellungen und Verfahrensweisen zu animieren.

„Algorithmik statt Algebra“

„Animation statt Algebra“

2. Beispiele

Die Möglichkeiten sind illustriert und kommentiert anhand von Problemstellungen aus dem Horizont der Schulmathematik

- Kurvendiskussion zu frei wählbaren Funktionstypen
- Bogenlänge und Krümmung von Kurven,
- Rekonstruktion einer Kurve aus ihrem Krümmungsverhalten
- Hochrechnung einer logistischen Entwicklung
- Weitere Anpassungen und Modellierungen
- Extremwertprobleme bei Funktionen in 2 oder 3 Variablen.

(30 Beispiele auf Herbsttagung 2009 / AKMUI Soest: www.math.uni-sb.de/ag/lambert/AKMUI09/Folien/vonPapeSoest09.pdf)

3. Postulate für eine künftige Schulanalysis

Im Kleinen:

Eine Tilgung des Terminus „Wendestelle“ für die Stellen, in denen es genau geradeaus geht ist, ist längst überfällig. Die Bezeichnung stammt aus dem Kontext des Wanderns auf Kurven, und sie verschleiert die Tatsache, dass es sich um ein bereits abgehandeltes Problem handelt. (Maximierung)

Der Mittelwert sollte – wegen seiner Anschaulichkeit und seiner Anwendungsnähe – gegenüber dem Integral eine Aufwertung erfahren. (Flächen-, Körperberechnung über Mittelwert der Höhe bzw. der Querschnittsfläche)

Im Großen:

Bei den „Prozessbezogenen Kompetenzbereichen“ der KMK-Standards sollten die „numerischen Elemente der Mathematik“ einbezogen und gleichberechtigt neben die „symbolischen Elemente“ gestellt werden.

Bei den „Inhaltsbezogenen Kompetenzbereichen“ sollte unter „Algorithmus“ eingefügt werden: Die Schülerinnen und Schüler

- formulieren einfache Algorithmen zur Anpassung und Optimierung
- setzen einfache einschlägige Algorithmen auf ihrem Gerät um.

Lernziele: Die Schülerinnen und Schüler sollen wissen:

1. Mit dem Gebrauch eines CAS-Systems bewegt man sich in zwei unterschiedlichen mathematischen Welten, der der Algebra und der der Numerik.
   (F. Klein: „Präzisionsmathematik“ – „Approximationsmathematik“ = „derjenige Teil, den man in Anwendungen tatsächlich braucht“)
2. („Fundamental“:) „In allen praktischen Gebieten der Mathematik gibt es einen Schwellenwert der Genauigkeit“ (F. Klein $\varepsilon = 1E\text{-}7$))
3. Die Bedeutung des Computers für die Mathematik liegt weniger in der Ausweitung der ersten Welt als in der Erschließung der zweiten.
4. Verlässt man die vorgegebenen Wege der Schulmathematik, so gerät man - sofern man algebraisch unterwegs ist - rasch in eine Sackgasse.
5. Der Rückgriff auf Ableitungen beim Maximieren und Minimieren macht Sinn nur dann, wenn man algebraisch zum Ziel kommt. Ist man numerisch unterwegs, so ist dies ein unsinniger Mehraufwand.
6. Die entscheidende Power des Rechners liegt im Rechnen. Die „Computer-Algebra“ ist sekundär, insbesondere „vitae“.