Ödön VANCSÓ, Budapest, Attila KOMZSIK, Nitra

Modellieren und Motivation anhand der Erfahrungen gewonnen durch die Anwendung einer realitätsbezogene Aufgabe

1. Einführung, Problemstellung

Im DQME-II EU Project ist ein Hauptziel neue realitätsnahe Unterrichtsmaterialien zu entwickeln und in der Klasse auszuprobieren und zu evaluieren. Die originale Idee stammt von Heinz Böer, der die Lehrergesellschaft MUED gegründet hat. Er ist ein wichtiger Person auch in der DQME-II Projekt. Eine Sub-Gruppe von Hans Humenberger (Wien) geleitet beschäftigt mit dem „Restgeschwindigkeit“ Problem. Es gibt vier Version zu dieser Aufgabe die vom Gesichtspunkt der Offenheit in einer zunehmende Skala eingeteilt werden können (A, B, C1, C2). Damit sich unsere Interesse in letzten Jahren (auch wegen einem anderen Project LEMA) in die Richtung Modellieren gedreht ist, haben wir die vierte meist offene Variante ausgewählt und damit Schulexperimente durchgeführt. (Wir haben auch einige Ergebnisse Version A und B.) Die Problemauswahl kann dadurch begründet werden dass die Anzahl der Unfälle wegen hoher Geschwindigkeit sehr hoch sowie in Ungarn als auch Slowakei verglichen mit anderen EU Ländern. Diese Wahl unterstreicht unsere Auffassung über die Wichtigkeit der Erziehungsaspekt des Mathematikunterrichts auch, die traditionell nicht betont ist (weil in Ungarn oder in Slowakei wurde die Mathematik oft in einem Elfenbeinturm geschlossen). Der mathematische Inhalt der Aufgabe ist Manipulationen mit quadratischen Gleichungen und Ungleichungen, graphische Lösungswege und rein algebraische Umformungen. Im Modellierungsprozess spielen die Entlassungen eine wichtige Rolle. Die fachübergreifenden Aufgaben und Probleme sind sehr oft unterstrichen und in diesem Mal eine nicht ungewöhnte Beziehung zwischen der Mathematik und Physik im Mittelpunkt steht.

Das Experiment wurde bis jetzt in zwei Schulklassen in Slowakei und in einer in Ungarn durchgeführt. Die offene C2 Version der Aufgabe wie den Schülern präsentiert worden ist:

Ein Auto fährt in einer 30er-Zone mit 30 km/h. Ein anderes Auto überholt dieses mit 50 km/h. Als die beiden Autos genau nebeneinander sind, geht ein Kind ohne zu schauen auf die Straße (z. B. um einen Ball zu holen). Die Autos haben gleich starke Bremsen und die Fahrer reagieren auch gleich schnell. Das Auto mit 30 km/h kommt noch gerade vor dem Kind zu stehen. Welche Restgeschwindigkeit hat das andere Auto an dieser Stelle?

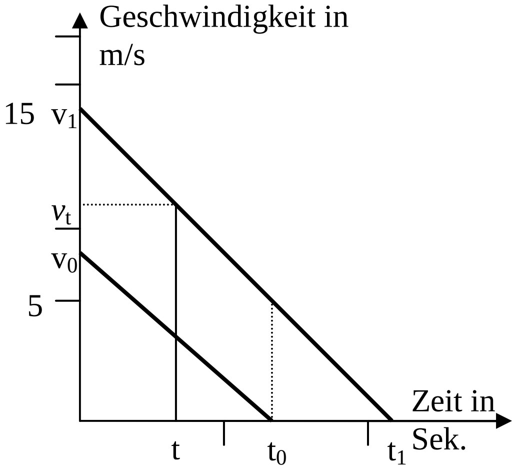
1) Schätze die Restgeschwindigkeit! Schätze die jeweilige Restgeschwindigkeit auch bei anderen Daten: wenn die Geschwindigkeiten (50km/h, 70 km/h) bzw. (70km/h, 100 km/h) – statt (30km/h, 50 km/h) – betragen!

2) Finde einen begründeten Wert für die Restgeschwindigkeit nicht nur durch Schätzung!

3) Wie kann man im allgemeinen Fall begründete Werte für die Restgeschwindigkeit angeben? Anfangsgeschwindigkeiten wie in 1) oder mit Variablen: v_0, v_0^*.

2. Eine graphische Lösungsmethode

Erst möchten wir eine „schöne“ Lösung vorstellen die klar zeigt, warum die erste falsche Schätzung (20 km/h) so oft bei dieser Aufgabe. Die ist *andere* wie in dem Projekt behandelten Versionen, und auf eine Repräsentation der Aufgabe durch eine Geschwindigkeits-Zeit Diagram basiert. Das erste einfache Modell ist die gleichmäßige Bremse ohne Reaktionszeit:



(1) $\frac{v_1 + v_t}{2} t = \frac{v_0}{2} t_0$ damit die Distanz vom Startpunkt des Bremsens und des Mädchens ist gleich für beide Autos;

(2) $\frac{v_1 - v_0}{t_1 - t_0} = \frac{v_1}{t_1} = \frac{v_t}{t_1 - t} = \frac{v_0}{t_0}$ aus ähnlichen Dreiecks (gleiche Beschleunigung). Aus (2) $v_t t_0 - v_0 t_1 = -v_0 t$ und $v_1 t_0 = v_0 t_1$, also $v_t - v_1 = -\frac{v_0 t}{t_0}$, aus der Gleichung (1): $v_t + v_1 = \frac{v_0 t_0}{t}$.

Aus den letzten zweien Gleichungen durch Multiplikation kommt: $v_t^2 - v_1^2 = -v_0^2$. Also kommt $v_t = \sqrt{v_1^2 - v_0^2}$ aus. Im unseren Fall: $\sqrt{2500 - 900} = 40$ (km/h).

Das ist überraschend hoch, die meiste Schüler schätzten unter, allgemein ca. 20 km/h, also die Hälfte. Woher kommt diese falsche Schätzung? Aus der falsche Betrachtung, dass der Unterschied zwischen den Geschwindigkeiten konstant bleibt wegen der gleichen Bremsen. Das bezieht sich aber immer auf *gleichzeitiges* Messen. In unserem Fall steht keine Gleichzeitigkeit.

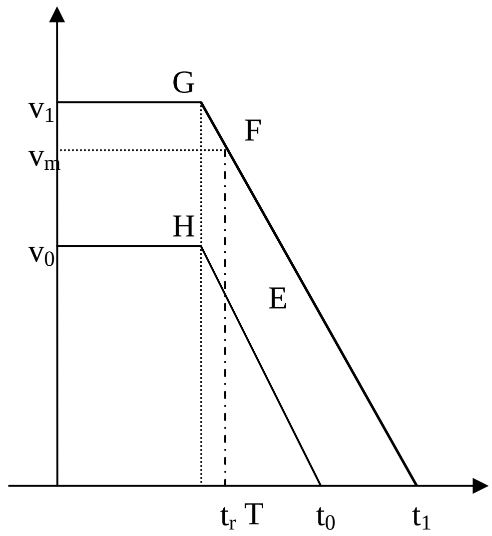
Ein rein physikalischer Gedanke macht die Lösung besonders einfach. Wenn die Bremsen sind gleich, dann die Arbeit der Reibung ist gleich auf einem bestimmten Weg für beide Wagen. Das erste Auto hat alle kinetische Energie verloren, also genauso viele Energie verliert das schnellere auch auf denselben Weg, also gilt es die Gleichung $E_r = \frac{1}{2} m v_1^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m v_r^2$ (E_r ist die „Rest kinetischer Energie“ der schnelleren Wagen als erreicht den Ort wo das Mädchen steht). Das zeigt sofort, dass $v_r = \sqrt{v_1^2 - v_0^2}$. Diese Idee entstand während dem Vortrag von einem Zuhörer, Ladislaus Kvasz aus Prag.

Das Zweite Modell (Reaktionszeit in Hinsicht zu nehmen)

Hier soll der Inhalt des Dreiecks ETt_0 mit dem Inhalt von v_0HGv_1 Rechteck plus von dem *HEFG* Paralelogramma gleich sein. Algebraisch

$(v_1 - v_0)T = (t_0 - T)(v_0 - [v_1 - v_m])$

Es gibt hier auch viele ähnlichen Dreiecks, davon kann weitere Gleichungen abgeleitet werden. Es ist klar, dass die Restgeschwindigkeit noch höher wird als im ersten Fall. Es gibt auch noch solche Fällen, wobei die Restgeschwindigkeit gleich v_1 (das bedeutet der Fahrer das Bremsen nicht begonnen hat).



Wegen des fehlenden Platzes wird die Lösung nicht gegeben, die Leser können diese schon folgend das Verfahren des ersten Modells und die Graphik des zweiten Modells rekonstruieren. Sei es nur kurz erwähnt, dass einige Schüler in einer durch Computer gut gerüsteten Schule in Ungarn schöne Simulationen mit dem Programm „Geogebra“ gemacht, verschiedene Modelle aufgebaut und durch Geogebra präsentiert und nachgerechnet.

3. Ergebnisse

Bis jetzt haben wir nur die Daten aus zwei slowakischen Schulklassen und aus einer Klasse einer besseren Schule in Budapest. In diesen drei Fällen die Schüler in Kleingruppen gearbeitet. Die Schule in Komarno (SK) und in Tornalja (SK) sind sehr different die ungarische in Budapest (HU) fällt näher zur ersten. Die erste gehört zu den erfolgreichsten Schulen in Südslowakei in den Fächern Mathematik und Physik. In Komarno haben alle unter den fünf Gruppen die erste Frage korrekt beantwortet erkannt dass die Restgeschwindigkeit unabhängig von den Bremsen ist, aufgenommen allein derer Gleichheit. Sie haben die Restgeschwindigkeit auch im Fall einer bestimmten Reaktionszeit (1 s) angegeben. Die Lösungen zeigen, sie sehr erfahren in der Lösung solcher Aufgaben sind, und alle eine bestimmte Methode (ausgenutzt die Beschleunigung *b*) benutzt und am Ende bemerkt hat dass die Lösung unabhängig von der Beschleunigung ist. Sie haben graphische Mittel benutzt (*s*-*v* Diagramms) aber keine von den oben erwähnten. Die erste Schätzung war falsch ausgenommen eine Gruppe, die mehr als 20 km/h geschrieben. In Tornalja haben nur zwei aus fünf Gruppen irgendeine Lösung gegeben und sie auch nur im meist einfachen Modell (ohne Reaktionszeit). Sie haben aber die Restgeschwindigkeit nicht

geschätzt. In Budapest gab es nur vier Gruppe, davon eine die Lösung bestimmen konnte. Die Schätzungen in allen Fällen falsch sind. In Budapest nur die Hälfte der Gruppen irgendeine graphische Repräsentation gewählt. Sie haben gar nicht mit der Reaktionszeit gerechnet. In einen anderen Klasse in Budapest, wo die Ergebnisse noch nicht aufgearbeitet haben die Gruppe ziemlich gut geschätzt aber nur wenige die Lösungen korrekt ausgerechnet. Sie haben viele Fehler gemacht, aber im Modellieren besser gewesen als die andere drei Klasse.
Im grob zu sagen in der Slowakei die Schüler besser in der Technik der Algebra sind und gut trainiert alles zu schreiben. Sie sind aber manchmal mechanisch und werden die Ergebnisse nicht erklärt. Im Modellieren haben sie wenigere Erfahrungen und bei der Interpretation eines Ergebnisses auch nicht stark. Die schwächere Schule ist aber ganz anders, dort die Technik nicht gut beherrscht und auch das Modell nur sehr grob. In der ungarischen Schule zeigten die Schüler wenigere Kenntnisse der algebraischen Technik als in der Schule in Komarno. Es ist aber wichtig betont zu werden, dass die Schüler in beiden Ländern ihre Überzeugung von der Wichtigkeit des Beibehaltens das Tempolimit ausgedrückt haben. Die Interviews zeigten wenigstens das Erreichen des Erziehungsziels des Experiments.

4. Schlussbemerkung

Aus den bisherigen Experimenten ist es klar zu sehen, dass die Studenten sehr wenige Erfahrungen in offenen Modellierensaufgaben haben. Sie brauchen die nötige Mittel selten, gibt es wenig Transfer zwischen Fächern in ihren Köpfen. In der besseren slowakischen Schule wurde die Algebra gut behandelt, die Schüler gaben aber keine Interpretation ihrer Ergebnisse. Sie haben gar nicht formuliert, warum sie oft falsch geschätzt haben. Sie ihre Modelle mit der Reaktionszeit verfeinert aber die Ergebnisse nicht mit dem einfacheren Modell verglichen worden sind.

Die Verfasser planen die ausführliche Analyse der Lösungen dieser Aufgabe durch Dokumenten zu publizieren die Daten gewonnen von den Schulexperimenten, die hier nur kurz berichtet. Die Zeitschrift ist eine internationale in Ungarn publizierte Zeitschrift TMCS (Teaching Mathematics and Computer Science) die gehoffte Termin ist das Ende dieses Jahres.

Literatur

A. Komžik -Ö. Vancsó: Modeling and motivation. In H-W. Henn & S. Meier (Hrsg.), *DQME-II Second annual publication of the Comenius Network DQME-II 2009* (S. 78-82) TU Dortmund

H. Humenberger: Brake applications and remaining velocity. In H-W. Henn & S. Meier (Hrsg.), *DQME-II First annual publication of the Comenius Network DQME-II 2008* (S. 67-82) TU Dortmund