Conny WALZEBUG, Dortmund

Mathematische Problemlöseprozesse von 6. Klässlern. Eine Untersuchung zu Vorgehensweisen und Schwierigkeiten bei der Bearbeitung arithmetischer Probleme

Probleme zu lösen, stellt eine komplexe und anspruchsvolle Aufgabe im (Berufs-)Alltag als auch im Mathematikunterricht dar. Erstaunlich ist, dass bisher sehr wenig über die Vorgehensweisen und Schwierigkeiten beim mathematischen Problemlösen von Schülerinnen und Schüler zu Beginn der Sekundarstufe bekannt ist (vgl. Heinze 2007). So orientieren sich beispielsweise Tests (vgl. Prenzel 2004) immer noch vorrangig an idealtypischen (linearen) Modellen des Problemlösens, wie sie z.B. von Polya aufgestellt wurden. Nur wenige empirische Arbeiten analysieren die tatsächlich ablaufenden Problemlöseprozesse (vgl. Schoenfeld 1985; Heinrich 2004 u.a.).

Ein Vergleich von Schülerlösungsprozessen mit idealtypischen (linearen) Modellen kann jedoch dazu führen, das reichhaltige Potential, welches in den Lösungsprozessen der Schülerinnen und Schüler enthalten ist, nicht vollständig zu erfassen. Im Sinne eines modernen und zeitgemäßen Mathematikunterrichts sind insbesondere selbstgesteuerte und selbstentwickelte Lösungsideen und Teillösungen im Hinblick auf das entdeckende Lernen wertvolle Bausteine des Problemlösens. Daher ist es notwendig, das Verständnis über das Problemlösen im Mathematikunterricht zu überdenken und die individuellen Prozesse von Schülerinnen und Schülern stärker in den Blick zu nehmen mit dem Ziel die Qualität der Prozesse besser verstehen zu können. Das Hauptziel dieser Arbeit ist es daher, die Lösungsprozesse auf Basis aktueller psychologischer und mathematikdidaktischer Erkenntnisse und mit Hilfe eines entsprechend angepassten Modells zu untersuchen, sie zu rekonstruieren und auf diese Weise einen Beitrag zu einem kompetenzorientierten Verständnis über mathematischen Problemlöseprozesse zu leisten.

Bestehende Modelle zum Problemlösen und zum Problemlöseprozess

Polyas Phasen (Verstehen der Aufgabe, Ausdenken eines Planes, Ausführen eines Planes, Rückschau) geben einen linearen Verlauf eines erfolgreichen Problemlöseprozesses an (Vgl. Polya 1995). Sie sind idealtypisch zu verstehen und eignen sich nicht als empirisches Beschreibungs- oder Analyseinstrument. Insbesondere die Phasen Ausdenken und Ausführen eines Planes sind bei Schülerinnen und Schülern häufig eng und untrennbar miteinander verbunden. Anstelle eines Planes lassen sich nicht selten verschiedene, kleinere Pläne identifizieren, die zum Teil aufeinander aufbauen, sich ergänzen, durch (Zwischen-)Reflexionen unterbrochen oder gar gänzlich abgebrochen und neu begonnen werden. Schoenfeld (1985) stützt sich auf das Modell von Polya, differenziert die Problemlöseprozesse jedoch in zentrale Problemlösetätigkeiten (read, analyze, explore, plan, implement, verify) (vgl. Schoenfeld 1985). Als zentrales Ergebnis seiner Untersuchungen führt er u.a. die mangelhafte Selbststeuerung als Ursache für erfolgloses Problemlösen an. Beim Versuch, die sechs Tätigkeiten auf Lösungsprozesse von Schülerinnen und Schülern zu übertragen, stößt man auf einige Probleme. Insbesondere die Tätigkeiten „analyze", „explore" und „verify" weisen bei ihrer Operationalisierung keine trennscharfen Kriterien auf. Diese Problematik ist Schoenfeld bewusst, er vermeidet sie jedoch nicht (vgl. Schoenfeld 1985). Folgestudien von Rott (2010) bestätigen diese Schwierigkeit bei der Anwendung auf Lösungsprozesse von 5. Klässlern. Rott plädiert für die Hinzunahme weiterer Tätigkeiten für eine angemessenere und lückenlose Beschreibung der Problemlöseprozesse. Einen wichtigen Kernaspekt bei der Problemlösung hebt Schoenfeld am Ende seiner Arbeit hervor: „But what was the basis on which those executive decisions were made?" (Schoenfeld, 1985, Seite 315). Teilt man den Problemlöseprozess in kleinere Abschnitte, so ergibt sich die Frage, aus welchen Gründen sich einzelne Aktivitäten bzw. Tätigkeiten ergeben und wie diese miteinander zusammen hängen bzw. wirken? In den Blick zu nehmen sind dazu die aufwändig zu erfassenden metakognitiven Aktivitäten, die die ausführenden Tätigkeiten während der Problemlösung leiten und regulieren. Der Teilbereich des Steuerungsverhaltens wird von Schoenfeld sowie von Heinrich als zentrales Merkmal beim Problemlösen hervorgehoben (vgl. Heinrich 2004). Dazu untersucht Heinrich mit Hilfe von unterscheidbaren Lösungsanläufen das Steuerungsverhalten und die Wechselanlässe von Studierenden und Oberstufenschülerinnen und –schülern beim Lösen geometrischer Probleme. Er unterscheidet zwischen lösungsfördernden und lösungshemmenden Steuerungsverhalten und sieht darin ein wesentliches Merkmale für erfolgreiches und erfolgloses Problemlösen. In seinen Ergebnissen zeigt sich, dass neben der Steuerung auch Aktivitäten der Reflexion und der Kontrolle bedeutsam sind für das erfolgreiche Bewältigen oder Scheitern eines Lösungsanlaufes sind (vgl. Heinrich 2004, Seite 351f.). Stehen die Ursachen für exekutive Entscheidungen in und zwischen Lösungsanläufen im Fokus, erscheint eine Trennung der Aktivitäten Steuerung und Reflexion sinnvoll, um auch die Auswirkungen von Reflexionen auf die Steuerung erfassen zu können. Dies ist durch die Modellananahmen von Heinrich nicht möglich, da sie bei ihm derselben Kategorie zugehören. Empirisch zeigt sich in seinen jedoch die Bedeutung der Rückkopplung von Reflexionsphasen hinsichtlich des Weiterkommens im Lösungsprozess. Auf Grundlage der wesentlichen Erkenntnisse aus den Arbeiten von

Polya, Schoenfeld und Heinrich lässt sich nunmehr eine eigene Modellierung des Lösungsprozesses aufstellen, in der Lösungsanläufe als zielgerichtete, zeitlich bestimmbare Elemente den Prozess gliedern.

Herleitung eines eigenen Beschreibungsmodells

Innerhalb eines **Lösungsanlaufes** verfolgt der Problemlöser ein oder mehrere Ziele, die dadruch den Lösungsanlauf charakterisieren und kennzeichnen. Dabei kann sich ein Lösungsanlauf im Wesentlichen aus drei Aktivitäten zusammensetzen, die im Folgenden ausgeführt werden. **Ausführungen s**ind direkt beobachtbare Aktivitäten, die sich z.B. in strategischen Vorgehensweisen zeigen. Ebenso dazu gehören das Aufschreiben von Beispielen oder das Anfertigen von Skizzen. Die **Steuerung** wird als eine *vorwärts*gerichtete bewusste oder unbewusste metakognitive Aktivität aufgefasst, die z.B. durch das Setzen von Zielen, das Generieren von (eigenen) Fragen oder die (Neu-)Strukturierung von Informationen auftreten kann. Die **Reflexion** wird verstanden als *rückwärts*gerichtete metakognitive Aktivität, die z.B. durch: Ergebnisse kontrollieren, Lösungswege bewerten, Ergebnisse mit mit der Aufgabenstellung vergleichen, etc. deutlich werden kann. Die Steuerung und die Reflexion beinhalten nicht immer direkt beobachtbare Aktivitäten, so dass sich diese zum Teil erst aus der Handlung innerhalb eines Lösungsanlaufes oder durch zusätzliche Informationen vom Problemlöser aus dem entsprechend angelegten Untersuchungsdesign[1] erschließen lassen. Auf Grundlage dieser Modellierung ergeben sich die Forschungsfragen:

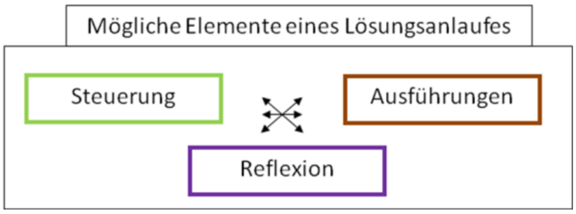

Abb. 1 Elemente eines Lösungsanlaufs

- Inwiefern können erfolgreiche als auch erfolglose mathematische Problemlöseprozesse von Schülern mit Hilfe des Modells beschrieben werden?
- Welche Wirkungszusammenhänge bestehen zwischen den drei Aktivitäten (Steuerung, Ausführung & Reflexion) während des gesamten Problemlöseprozesses?

Ein Fallbeispiel am Problem „Reihenfolgezahlen“ (in Kurzfassung)

Additionsaufgaben aus Reihenfolgezahlen sind Summen aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen, bspw. 2+3, 14+15+16 und 3+4+5+6+7+8. Nicht jedoch: 2+5 oder 3+4+8 oder 12+12. Finde alle Additionsaufgaben aus Reihenfolgezahlen, deren Ergebnis nicht größer als 30 ist.

[1] Grobes Setting des Untersuchungsdesigns: 1. Sicherung des Aufgabenverständnisses; 2. Einzelbearbeitung des Problems; 3. Austausch mit Partner (Strategiekonferenz); 4. Videogestützter stimulated Recall.

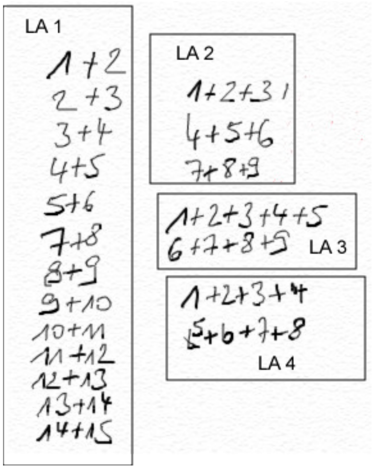

Abb. 2 Schülerlösung

Die Abb. 2 zeigt die gesamte Schülerlösung, die in 4 Lösungsanläufe (LA) unterteilt wird. Der erste Lösungsanlauf wird von der Idee geleitet (Steuerung), stets 2 Summanden auszuwählen, mit den kleinstmöglichen zu beginnen und die nachfolgende Aufgabe mit der letzten Zahl der Vorherigen zu beginnen. Dieses Vorgehen wird solange durchgeführt, bis die Kontrolle ergibt, dass das Ergebnis über 30 ist, dann beginnt LA 2 mit einer ähnlichen Steuerung. Der Schüler beginnt jedoch bei der neuen Aufgabe mit dem Nachfolger der letzten Zeile (Strategiewechsel). Die Dominanz dieser Steuerung führt dazu, dass ihm weitere Aufgaben mit 3 Summanden verborgen bleiben. LA 3 beginnt er mit 5 Summanden und mit derselben Steuerung wie in LA 2. Er beendet die zweite Aufgabe nach der Zahl 9, da er erkennt, dass er sonst über 30 kommt. Hier stoppt ihn seine kontinuierliche Kontrolle und führt ihn dazu im LA 4 zwei Aufgaben mit 4 Summanden aufzustellen.

Der Schüler zeigt insgesamt zwei tragfähige Strategien zum Finden von Additionsaufgaben. Seine Steuerung ist vielversprechend, die Dominanz der Idee „mit dem Nachfolger zu beginnen" ab LA 2 und die fehlende Reflexion über seine Zeile „6+7+8+9" verhindern jedoch, dass er zu einer vollständigen Lösung kommt. Erst in der anschließenden Strategiekonferenz mit einem Mitschüler wird er auf diese, ihm fehlende Reflexion aufmerksam. Anschließend ist er in der Lage weitere Aufgaben zu erzeugen. Problematisch bleibt die Erfassung aller möglichen Aufgaben. Anregungen zur Reflexion der Vollständigkeit seiner erweiterten Lösung durch den Interviewer im stimulated Recall führen nur noch zu der Aussage des Schülers, dass es sicherlich noch „mehr Aufgaben geben wird", dazu müsste er aber noch einmal gründlich nachdenken.

Literatur

Heinrich, F. (2004): *Strategische Flexibilität beim Lösen mathematischer Probleme*. Hamburg: Kovac.

Heinze, A. (2007). *Problemlösen im mathematischen und außermathematischen Kontext*. JMD , Heft 1, 3-30.

Prenzel, M. (2004): *PISA 2003*. Münster: Waxmann.

Pólya, G. (1995): *Schule des Denkens*. Tübingen: Francke.

Rott, B. (2010): *Empirisch begründete Phasen in den Problemlöseprozessen von Fünftklässlern*. BzMU 2010. München.

Schoenfeld, A. H. (1985): *Mathematical problem solving*. San Diego: Academic Press.