Ysette WEISS-PIDSTRYGACH, Köln; Rainer KAENDERS, Köln

Geometrisches Propädeutikum zur Begriffsbildung der Analysis

Im folgenden Beitrag stellen wir ein Projekt des Internetlabors math-il.de vor, welches sich mit der langfristigen, koninuierlichen Bildung grundlegender Begriffe der Analysis wie funktionaler Zusammenhang, Monotonie, Extremalverhalten und Stetigkeit befasst. Den Ausgangspunkt des Projektes bilden konktrete Beobachtungen aus der Unterrichtspraxis der beteiligten Lehrer und unser gemeinsames Interesse an einer langfristigen konzeptuell-orientierten und mit derzeitigen curricularen Veränderungen verträglichen Begriffsentwicklung im Analysisunterricht. Detailiertere Informationen zum Forschungsansatz und der Arbeitsweise des Internetlabors math-il.de werden in diesem Tagungsband bei Kanders (2010) vorgestellt, ein weiteres Projekt findet man bei Berendonk (2010)

1. Das math-il.de Projekt

Ausgangspunkt des Projekts sind von Gymnasiallehrern formulierte Probleme des derzeitigen Analysiscurriculums der Sek II. Nach ihrer Beobachtung zeigt sich, dass die sehr bildhaften, an den Graphen einer Funktion gebundenen Vorstellungen der Begriffe funktionaler Zusammenhang, Monotonie, Extremalverhalten und Stetigkeit kaum in abstraktere Kontexte übertragbar und der Entwicklung eines konzeptuelleren Verständnisses hinderlich sind.

Das Projekt befindet sich in der ersten Phase des Entwicklungszyklus des math-il.de-Konzepts, d.h. der Entwicklung eines Unterrichtsrohlings (Analyse und Diagnose der Problemstellung, im Schulsystem verortete Zielstellung, vorläufige Unterrichtsentwürfe mit Materialien und ein an der Problemstellung und den Entwürfen orientiertes Messinstrument).

Da es bei der Entwicklung der Begriffe der Analysis der SekII verschiedene Ansätze gibt und in anderen mathematischen Kulturen (zB in Osteuropa) langjährige starke Traditionen des Geometrieunterrichts und seiner Vernetzung mit Analysis existieren, schien es uns in diesem Fall sinnvoll, mit einer historischen und sozial-kulturellen Einordnung des aus der aktuellen deutschen Unterrichtspraxis stammenden Problems zu beginnen. Eine solche Einordnung setzt aber auch die Entscheidung für ein lerntheortisches Paradigma voraus, im Rahmen dessen sowohl die Einordnung, die vergleichenden Analysen und als auch die entsprechende

Diagnostik und Entwicklung des Messinstrumenets erfolgt. Die theoretische Grundlage für die Einordnung und Diagnose kommen aus der Tätigkeitstheorie, das Messinstruments basiert auf linguistischen Methoden und interpretiert Begriffsentwicklung als Entwicklung mathematischen Bewusstseins (Kanders & Kvasz, 2010).

Um die Problemstellung einzuordnen wurden folgende Staatsexamensthemen vergeben: „Bindung Funktionsbegriff an Graphen im Zeitraum Meraner Reform bis zum Beginn der Neuen Mathematik“, „Zuordnung, Programmierung und mengentheoretische Herangehens-weisen als Propädeutikum des Funktionsbegriffs in der Neuen Mathematik“, „Projektive und andere Geometrien als Propädeutikum des Funktionsbegriffs“, „Empirische Erkenntnisse zur Bindung Funktion-Graph in Schülervorstellungen“, „Bindung Funktion-Graph bei der Verwendung neuer Medien“, „Lehrbuchanalyse zur Bindung des Funktionsbegriff an den Graphen in der aktuellen Situation“.

2. Warum „geometrisches“ Propädeutikum?

Die Idee, funktionales Denken an geometrischen Problemstellungen zu entwickeln, findet man schon in den Ansätzen der neuen Geometrie und explizit im Meraner Lehrplan (Krüger, 2000). Die beschriebene aktuelle Ausgangssituation und unser Interesse an langfristiger, nach dem Spiralprinzip organisierter Begriffsentwicklung und konzeptuellem Begriffsverständnis rückt außerdem folgende Aspekte in den Vordergrund: Geometrische Phänomene erlauben frühzeitig eine intuitive, anschauliche, problemorientierte Motivation der genannten Begriffe, ohne dabei auf die Repräsentation des funktionalen Zusammenhangs als Funktionsterm, Wertetabelle oder Funktionsgraph angewiesen zu sein. Die Möglichkeiten dynamischer Visulisierung und experimenteller Hypthesenfindung vieler geometrischer Problemstellungen verdeutlichen ausserdem die Kontextbezogenheit von Koordinatisierungen und Variationsprinzipien und unterstützen dadurch ein konzeptuelles Verständnis dieser wichtigen Untersuchungsmethoden funktionaler Zusammenhänge. Im Unterschied zu kalkülorientierten Problemstellungen, deren Lösung in der Bestimmung konkreter Funktionen und deren Eigenschaften unter Verwendung der verschiedenen Darstellungsformen besteht, stehen bei geometrischen Fragestellungen oft Attribute funktionaler Zusammenhänge wie Symmetrie, Monotonie und Stetigkeit im Vordergrund. Der damit verbundene Sichtwechsel von der konkreten Funktion zu einer durch Attribute gekennzeichneten Menge von Funktionen entspricht dem

Wechsel zwischen lokaler und globaler Sichtweise. Der Sichtwechsel zwischen Lokalem und Globalem ist sowohl eine der wichtigsten elementaren Heuristiken der moderenen Analysis als auch ein wesentlicher Schritt bei der Formalisierung und Konzeptualisierung der mit den Attributen verbundenen Begriffe.

3. Hintergründe aus der Tätigkeitstheorie

Tätigkeitstheorie gilt oft (ähnlich wie Kategorientheorie in der Mathematik) als “abstract nonsens“ in der Psychologie. Zusammenhänge zwischen Denken und Handeln werden nicht durch die Betrachtung einzelner Tätigkeiten untersucht, sondern durch die Untersuchung der Dynamik weniger universeller Prinzipien, denen nach axiomatischer Annahme alle Tätigkeiten genügen. Modelle der Tätigkeitstheorie bilden daher weniger einen Ansatz zur Konstruktion “guter Unterrichtsinhalte und -methoden”, sie sind in erster Linie ein diagnostisches Instrument zur Überprüfung des Vorhandenseins wichtiger Entwicklungspotentiale.

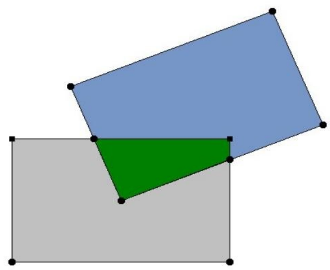
Eine der Annahmen der Tätigkeitstheorie (Vygotsky, 1934) ist, dass der Mensch niemals direkt mit seiner Umwelt agiert, sondern mittels Werkzeugen, wie etwa Worte, Instrumente, Algorithmen, Artefacte . Im Mathematikunterricht tritt ein mathematischer Begriff in zwei verschiedenen Rollen auf, er ist vermittelndes Werkzeug bei der Tätigkeit „Lösen mathematischer Probleme“ und die durch ihn bezeichnete mathematische Struktur ist selbstständiger Untersuchungsgegenstand, also Ziel einer Tätigkeit. Die Entwicklung des Werkzeuges „Begriff“ setzt eine Wechsel dieser Rollen voraus. Eine zweite wichtige Annahme ist die hierarchische Struktur von Tätigkeiten und eine Entwicklung als Resultat der dialektischen Interaktion der verschiedenen Ebenen (Kaptelinin ,1999) .

Tätigkeitstheoretische Ansätze zur Begriffsbildung erlauben es, Unterrichtsinhalte dahingehend zu analysieren, ob durch Automatisierung einer Handlung zur Routineoperation und der damit verbundenen starken Bindung der vermittelnden Werkzeuge an die Untersuchungsobjekte der Transfer der verinnerlichten Handlung in andere Kontexte erschwert oder sogar unmöglich wird.

Problemlösetätigkeiten, welche die Entwicklung eines konzeptuellen Verständnisses funktionaler Zusammenhänge zum Ziel haben, sind auch auf Operationalisierungen funktionaler Zusammenhänge durch Funktionen , im speziellen durch Graphen angewiesen. Die anschauliche und deshalb leichter zu automatisierende Verwendung von

Funktionsgraphen als vermittelndes Werkzeug ist deshalb begründet und ein wichtiges Element der Bildung des Begriffs funktionaler Zusammenhang und damit vernetzer Begriffe.

Ziel des hier beschriebenen Projektes ist es Ansätze in die Praxis zu bringen, die einer einseitigen Operationalisierung durch Funktionsgraphen entgegenwirken und den vorher beschriebenen Wechsel der Rolle mathematischer Begriffe und eine ausgeglichen Dynamik zwischen Operationalisieren und Konzeptualisieren der Begriffe anstreben. Es gibt mannigfaltige konkrete Beispiele für Problemstellungen, bei denen die Betrachtungfunktionaler Zusammenhänge oder Eigenschaften wie Symmetrie, Monotonie und Stetigkeit eine Lösungsmethode darstellen, die Verwendung von Funktionsgraphen jedoch nicht zweckmäßig ist. Ein einfaches Beispiel ist etwa die Betrachtung der möglichen Konfigurationen zweier kongruenter Rechtecke, bei denen der Eckpunkt des einen im Mittelpunkt des anderen liegt, und die Frage nach der dem größten Flächeninhalt des Durchschnitts.



Sobald die Analyse und Diagnose der oben beschriebenen Probleme bei der Begriffsbildung in der Analysis zur Erstellung eines Unterrichtsrohlings geführt hat, werden weitere LehrerInnen gewonnen, die gemeinsam mit Kollegen in ihrem eigenen Unterricht Beiträge zur Lösung dieser Problemen entwickeln wollen. Der so geformten Gruppe von fünf bis zehn MathematitiklehrerInnen wird dann das Messinstrument dazu dienen, zu erkennen, welche ihrer eigenen Bemühungen sie ihrem Ziele näher bringen.

Literatur

Berendonk, S. (2010). *Wie kann Topologie in der Schule sinnvoll unterrichtet werden?* Beiträge zum Mathematikunterricht, Münster: WTM Verlag.

Kaenders, R. & Kvasz, L. (2010). *Mathematisches Bewusstsein*. Eingereicht in: Lengnink, K. & Nickel, G. & Wille R. (Hrsg.) Mathematik verstehen – philosophische und didaktische Perspektiven, Siegen, 2010.

Kaptelinin, V., Nardi, B.A., Macaulay, C. (1999), *Methods and tools: the Activity Checklist: a tool for representing the space of context*, Interactions, Vol. Issue 6 pp.27-39.

Krüger, K.,(2000) *Erziehung zum funktionalen Denken*, Kap.7 ,Logos, Berlin, 2000.

Vygotsky, L.(1934) *Psychologie der Entwicklung des Menschen*, Kap.8, S.1026, (russisch), Smysl, Moskau, 2005.