

Angelika BIKNER-AHSBAHS, Bremen,  
Ivy KIDRON, Jerusalem, Tommy DREYFUS, Tel Aviv

## **Epistemisch handeln können – aber wie?**

Epistemisch zu handeln, heißt, sich in seinem Handeln auf Erkenntnis auszurichten. Erfolgreiches epistemisches Handeln baut, wenn es gelingt und zu Erkenntnis führt, Wissen durch einsichtsvolles Tätigsein auf. Im deutsch-israelischen Projekt „Effective mathematical knowledge construction in interest-dense situations“, gefördert von der German-Israeli-Foundation (Grant 946-357.4/2006), gehen wir der Frage nach, wie Prozesse der Wissenskonstruktion stattfinden. Insbesondere wollen wir verstehen, was Lernende antreibt, sich in diese „Erkenntnisprozesse“ fortgesetzt zu involvieren, wie sie Fortschritte machen und zu Erkenntnissen gelangen.

### **1. Stand der Forschung**

Die Erforschung der Frage, wie mathematisches Wissen konstruiert wird, hat in der Mathematikdidaktik eine lange Tradition. Man kann im Wesentlichen zwei Richtungen unterscheiden, Prozess-Objekt-Ansätze und dialektisch-komplementäre Ansätze. Vertreter der ersten Richtung sind z. B. Dubinsky und McDonald (2001) und Sfard (1991) und ein Vertreter der zweiten ist z. B. Radford (2008). Gilmore und Inglis (2008) kritisieren vom-Prozesse-zum-Objekt-Ansätze als ergänzungsbedürftig. Sie weisen nach, dass es Lernende gibt, die genau umgekehrt agieren, z. B. Summen erfassen können, ohne Addieren zu können.

Eine Sichtung der Literatur zeigt, dass nicht entschieden werden kann, wie Wissen genau aufgebaut wird. Je nach theoretischer Perspektive wird Wissensgenese unterschiedlich erfasst. Allen Ansätzen gemeinsam ist jedoch, dass explizit oder implizit Handlungen als didaktischer Zugang zu Wissensaufbau angesehen werden. Wenn man nun mittels Handlungen Basismodelle des Wissensaufbaus gewinnt, dann kann das, was Wissen ist, in seinen unterschiedlichen Formen und Bezügen zueinander empirisch erschlossen werden. Mathematisches Wissen ergäbe sich dann aus fachlichen Einsichten, die in epistemischen Handlungen zu mathematischen Fragestellungen gewonnen und - nach z. B. einer Überprüfung auf Gültigkeit - als geltend akzeptiert werden. Wie dieses Wissen in spezifischen Situationen generiert wird und was es ausmacht, wird auf diese Weise zu einer empirischen Frage. Genau dieses Anliegen verfolgen die beiden empirisch gewonnenen epistemischen Handlungsmodelle, die in dem vorliegenden Projekt als zentrale Werkzeuge verwendet werden. Sie sind Basis für die Rekonstruktion von Wissenskonstruktion aus individueller und sozialer Sicht.

## **2. Das RBC+C-Modell: Wissenskonstruktion als individueller Prozess**

Basierend auf Davydovs Arbeiten (1972/1990) arbeiten Hershkowitz et al. (2001) mit einer kontextuellen Theorie der Abstraktion. Sie fassen Abstraktion als kulturelle menschliche Aktivität auf, die durch Handeln hergestellt wird. Diese Aktivität wird referierend auf Treffers & Goffree (1985) als kontextabhängige, vertikale Reorganisation von Wissen in neue mathematische Wissensbestandteile hinein verstanden. Dabei meint Kontext alles, was nicht zum direkten Wissensaufbau gehört, z. B. die Lernendenbiographien oder das soziale Umfeld. Nach diesem Modell besteht Abstraktion aus drei Phasen. Zunächst entsteht ein Bedürfnis für ein neues Konstrukt; dieses führt zur Neu-Konstruktion von Wissen, das mit dem RBC-Modell als geschachteltes epistemisches Handlungsmodell beschrieben werden kann; abschließend wird das neue Konstrukt konsolidiert (consolidated +C) (gesichert, verfügbar gemacht). Das RBC-Modell setzt sich aus den mentalen Handlungen Recognizing, Building-With und Constructing zusammen. Sie sind in Aufgabenlösungen insofern beobachtbar, als die Bearbeitung von Aufgaben durch kommunikatives, praktisches oder reflektierendes Handeln als Realisierungen epistemischen Handelns erfolgt. Recognizing-Handlungen (R) treten dann auf, wenn eine Person Konstrukte als relevant für eine Aufgabenlösung wiedererkennt. Building-with-Handlungen (B) sind Handlungen des für eine Aufgabenlösung als relevant angesehenen Zusammensetzens von wiedererkannten Konstrukten. Mit Konstruktion (Constructing: C) ist stets die Entstehung eines neuen mathematischen Konstruktes gemeint. Es umfasst Building-with-Handlungen und diese wiederum umfassen Recognizing-Handlungen.

Dieses Modell ist in zahlreichen Arbeiten auf unterschiedliche Kontexte bezogen worden: auf Einzellerne, auf Klassensituationen, Schülerpaare und -gruppen. Es konnten Building-with-Handlungen unterschiedlicher Qualität identifiziert werden, eine Teiltheorie der Konsolidierung entwickelt werden, und schließlich haben Kidron und Dreyfus zeigen können, wie Konstruktionen ineinandergreifen (für einen Überblick: vgl. Schwarz, Dreyfus und Hershkowitz, 2009).

## **3. Das SVSt-Modell: Wissenskonstruktion als sozialer Prozess**

Das Anliegen, günstige Bedingungen für ein Mathematiklernen mit Interesse im Alltagsunterricht zu finden, hat zum Konzept interessendichter Situationen und seiner empirisch basierten Kennzeichnung geführt. Angelehnt an das Konzept der interaktionalen Verdichtung (Krummheuer, 2001) und das des Interesses als Relation zwischen Person und Interessengegenstand (Krapp, 2005) werden interessendichte Situationen im Mathematikunter-

richt als Situationen aufgefasst, die infolge einer mathematischen Fragestellung entstehen und folgende Merkmale aufweisen: die Lernenden involvieren sich tief in die Frage (*tiefes Involvieren*), sie bauen eine progressive Erkenntnisdynamik in dem Sinne auf, dass Wissen fortgesetzt weiterführend konstruiert wird (*progressive Erkenntnisdynamik*), und sie wertschätzen mathematische Inhalte und Aktivitäten implizit oder explizit (*positive mathematische Wertigkeit*).

Interessendichte Situationen und damit auch die Konstruktion mathematischen Wissens werden als sozial hergestellt angesehen und wurden in Hinblick auf die Frage untersucht, wie sie initiiert, stabilisiert und weitergeführt werden. In diesem Zusammenhang wurde ein epistemisches Handlungsmodell, das SVSt-Modell (englisch: GCSt), empirisch begründet entwickelt, mit dem die Erkenntnisdynamiken auch in nicht-interessendichten Situationen beschrieben werden können. Dieses Modell besteht aus drei kollektiven Handlungen, dem *Sammeln* ähnlicher mathematischer Bedeutungen, dem *Verknüpfen* weniger Zeichen/mathematischer Bedeutungen und dem *Struktursehen*. Dabei wird Struktur als Einheit von Beziehungen aufgefasst, die prinzipiell auch auf andere Sachverhalte übertragbar ist. Interessendichte Situationen zeichnen sich dadurch aus, dass sie alle ins Struktursehen hineinführen, und genau das macht sie zu besonders effektiven (im Sinne von tief gehenden) Lernprozessen. (Bikner-Ahsbahs, 2005)

#### **4. Methodisch-methodologische Betrachtungen**

Das vorliegende Projekt geht davon aus, dass Lernumgebungen entwickelbar sind, die in Hinblick auf die Aufgabenformate für die Genese von interessendichten Situationen günstige Bedingungen schaffen können. Die zwei komplementären Analyseansätze mit Analyseeinheiten vergleichbarer Größe fordern aber diachrone Betrachtungsweisen. Fruchtbar für Datenanalysen komplementärer Sichtweisen sind Methodologien zur Theorievernetzung (Bikner-Ahsbahs & Prediger, 2010). Ob die beiden Modelle letztendlich zu einem integralen oder aber komplementären epistemischen Handlungsmodell zusammengeführt werden können, ist derzeit noch nicht geklärt.

Entwickelt wurde eine Überkreuzmethodologie in fünf Schritten: Vereinbarung über die gemeinsame Aufgaben- oder Fragestellung, separate Bearbeitung, Austausch der Ergebnisse, Überarbeitung im Lichte der fremden Resultate, Konsensbildung soweit wie möglich.

Überkreuzmethodologisch wurden drei Aufgaben mit Interviewerinstruktion entwickelt: Aufgaben zu einer Kettenbruchentwicklung, zur Parabel als geometrischer Ort und zu einer logischen Aufgabe, die eine Argumenta-

tion im Sinne einer vollständigen Induktion fordert. Diese Aufgaben wurden in Deutschland und Israel pilotiert. Ebenfalls mit dem Überkreuzverfahren wurden Kriterien für die Video-Datenerhebung, die Transkriptionsregeln und die Übersetzung ins Englische unter Berücksichtigung von kulturell bedingten Sprechweisen erstellt. In die Datenerhebung wurden drei Schülerpaare in Deutschland und vier in Israel einbezogen. Alle Schülerpaare bearbeiteten alle drei Aufgaben, allerdings in unterschiedlicher Reihenfolge, damit Lerneffekte berücksichtigt werden können. Derzeit führen wir Überkreuz-Mikroanalysen der Transkripte ebenfalls in den oben genannten Schritten durch. Erste Ergebnisse sollen nun anhand einer Aufgabebearbeitung zu Kettenbrüchen vorgestellt werden.

## 5. Die Kettenbruchaufgabe

Hier siehst du eine Folge von Brüchen, die eine Kettenbruchentwicklung darstellten:

$$f(0) = 1$$

$$f(1) = 1 + \frac{2}{1} = 1 + 2 = 3$$

$$f(2) = 1 + \frac{2}{1 + \frac{2}{1}} = 1 + \frac{2}{1+2} = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$$

$$f(3) = 1 + \frac{2}{1 + \frac{2}{1 + \frac{2}{1}}} =$$

Füge drei weitere Terme  $f(4)$ ,  $f(5)$ ,  $f(6)$  hinzu und berechne sie.

Schau dir die 7 Terme  $f(0)$ , ...,  $f(6)$  an. Kannst du ein Muster finden? Erkläre das Muster – wieso funktioniert es?

Berechne alle Terme bis  $f(20)$  und stelle sie als Bruch und als Dezimalzahl dar. Stelle eine Vermutung auf und begründe sie.

## 6. Exemplarischer Vergleich der beiden Modelle

Sammeln und Verknüpfen von Bedeutungen können als *Heuristiken* verstanden werden, während Recognizing und Building-with gemäß der Aufgabenstellung und Ziele *passieren* (Cramer, 2008). Constructing bezieht sich stets auf Neukonstruktionen und ist somit - wie theoretisch gefordert - kontextabhängig, während Struktursehen das nicht ist und auch nicht auf innermathematische Sachverhalte beschränkt bleibt. Priwitzer (2008) vergleicht die Basishandlungen und zeigt, dass Recognizing adaptiv auftreten kann. In diesem Fall haben die Lernenden eine so ausgeprägt gemeinsame Erkenntnisbasis in der Situation aufgebaut, dass ein wiedererkanntes Konstrukt sofort auch bei anderen zu einem Wiedererkennen dieses Konstruktes führt. Die sozial geteilte Wissensbasis macht also das adaptive, individuelle Mitdenken mit anderen möglich. Sammelhandlungen können im Erkenntnisprozess gänzlich unterschiedliche Funktionen haben. Zu Beginn von Erkenntnisprozessen beobachtet man häufig offenes, ungerichtetes

Sammeln. Im weiteren Verlauf tritt dann durch Ziele geleitetes sowie überleitend zum Verknüpfen auch resümierendes Sammeln auf.

## **7. General epistemic need – ein unbestimmtes Erkenntnisbedürfnis**

Die Untersuchung der Frage, was Erkenntnisprozesse im Detail überhaupt antreibt, ist die Kernfrage des vorliegenden Projektes. In dem Versuch, das *need for a new construct (NNC)* als erste Phase zu identifizieren, sind wir jedoch wiederholt gescheitert. Stattdessen aber konnten wir andere Bedürfnisse rekonstruieren, so z. B. ein Bedürfnis nach größerer Genauigkeit, nach einem Muster oder nach einer verallgemeinernden Betrachtung. Diesen vielen Bedürfnissen schien ein basales, eher unbestimmtes Erkenntnisbedürfnis zugrunde zu liegen, das wir als *general epistemic need (GEN)* bezeichneten und im weiteren Projektverlauf untersuchten.

Das GEN begleitet Erkenntnisprozesse. Es scheint der Antrieb für die vielen kleinen Schritte zu sein, die das Voranschreiten des epistemischen Prozesses von einer vagen Idee zum definierten Konstrukt ausmachen, und es scheint situationales Interesse stabilisieren zu können. Besonders deutlich wird das GEN in Grenzsituationen. Das sind epistemische Situationen, in denen der Erkenntnisprozess stockt und Grenzerfahrungen gemacht werden. In solchen Situationen erfahren die Lernenden einen Erkenntnismangel, z. B. funktioniert eine vertraute Methode nicht mehr, notwendige Werkzeuge stehen nicht zur Verfügung, die Situation ist zu unübersichtlich, es mangelt an Konkretisierungen zum besseren Verständnis und so fort. Mit diesen Grenzerfahrungen gingen die Schüler auf zwei unterschiedliche Weisen um: Die Schüler gaben entweder auf oder ein unbestimmtes Erkenntnisbedürfnis (GEN) führte zu einer Situation, in der sie durch spezifische Erkenntnis produzierende Handlungen den Erkenntnismangel zu stillen versuchten. Dies geschah auf unterschiedliche Weise.

**a. Aufgeben:** In diesem Fall ist das GEN nicht vorhanden/ nicht ausgeprägt genug, um den Erkenntnisprozess voranzubringen, oder aber das vorhandene Wissen und die Anforderungen sind zu weit voneinander entfernt.

**b. Bedingungen werden passend verändert:** In diesem Fall passen die Anforderungen erst nach einer leichten Anpassung zum vorhandenen Wissen; eine Veränderung der Bedingungen führt dazu, dass wieder epistemisch gehandelt werden kann.

**c. Zurückbeziehen auf eine gesicherte Wissensbasis:** In diesem Fall geht es den Schülern um Sicherheit im Erkenntnisprozess. Auf die Frage des Interviewers bei der Bearbeitung der Kettenbruchaufgabe: „und wie sähe dann  $f$  von  $100001$  aus?“ antwortet Matthias nach einer Weile (1412): „aber was wir auf jeden Fall wissen, dass ähm ne 1 vor dem Komma steht

...“ Er stellt damit klar, welches Wissen gesichert ist, dass nämlich der gesuchte Kettenbruch auf jeden Fall mit 1 beginnt.

**d. Realisierungen von direkt Erkenntnis produzierenden Handlungen, die bestimmte Formen des GEN stillen können:** Während in den Fällen b und c erst eine Situation geschaffen wird, in der man wieder epistemisch handeln kann, geschieht epistemisches Handeln in diesen Fällen unmittelbar, und zwar Erkenntnis produzierend. Rekonstruiert wurden bislang folgende direkt Erkenntnis produzierenden Handlungen: nach Mustern/ Strukturen suchen/diese nutzen, Hypothetisch handeln/Hypothesen prüfen, Begriffe bilden/ausarbeiten, Präzisieren/Konkretisieren/Spezifizieren, Formalisieren und Begründen/Beweisen. Dies soll nun ein Beispiel verdeutlichen.

Auf die obige Frage nach  $f(1000001)$  ergibt sich folgende Gesprächssequenz (,ja bedeutet: Die Stimme setzt neu an, und /M: M fällt ins Wort):

1413 /M: das ne ungerade Zahl ,ja

1414 T: 2 komma ,null null null null null

1415 /M: ja weils ne ungerade ähm ,Stelle ist

1416 T: ja ,es ist ganz nah an 2 dran schon

1417 M: ja

1418 T: das sind dann ja irgendwie 100 Nullen oder so (lacht) ,und dann kommt irgend ne andere Zahl

$f(1000001)$  kann nicht bestimmt werden, deshalb wird *gesammelt* und *verknüpft*. Zunächst stellt Matthias fest, dass das Argument ungerade ist (1413). Tims Beitrag ist dann eine Folgerung gemäß der vorhandenen Wissensbasis. Die *Begründung* von Matthias macht Tims Beitrag zu einer geprüften *Hypothese* (1415). Tim fühlt sich dann aufgefordert, seine Äußerung auszuarbeiten. Er vollzieht dabei einen *spezifizierenden* Sichtwechsel und *konkretisiert* ihn abschließend (1416, 1418). Dadurch wird zum ersten Mal die Zahl 2 mit dem Approximationsverhalten der Folgenglieder verglichen. Ein GEN wird zwar nicht explizit, implizit aber sind die direkt Erkenntnis produzierenden Handlungen geeignet, ein spezifisches GEN zu stillen, z.B. das *Bedürfnis nach Konkretisierung* oder *Begründung*.

**e. Bedürfnis nach einem neuen Konstrukt (NNC):** Bisweilen wissen die Schüler genau, was sie brauchen, um voranzukommen. In einem solchen Fall spricht man von einem *need for a new construct* (NNC). In der vorliegenden Episode entsteht ein solches NNC, als der Interviewer nach zahlreichen Grenzerfahrungen fragt, wie es wohl weitergeht. Tim ist der Auffassung, die Folge nähere sich der 2, erreiche 2 aber nicht (potenziell unendlich), und Matthias meint, sie erreiche im Grenzfall 2 (aktual unendlich).

Klärungsversuche leiten über zur Frage, *weshalb* die Kettenbrüche sich der Zwei nähern. Dies kann nicht unmittelbar beantwortet werden, stellt also eine Grenzerfahrung dar, die ein Bedürfnis für eine explizite (neue) Funktionsdarstellung der Kettenbrüche (NNC) erzeugt. Tim äußert dies sogar: „das Beste wäre wenn wir ne Funktionsgleichung hätten ne“. Dieses Bedürfnis führt intensiviert zu epistemischen Handlungen, die das NNC aber nicht unmittelbar stillen können, sondern nur mittelbar durch Vorschalten eines stillbaren GEN (vgl. mit Kidron et al., 2011).

Direkt Erkenntnis produzierende Handlungen bringen den Prozess in kleinen Schritten voran, denn nach direkt Erkenntnis produzierenden Handeln weiß man mehr als vorher. Mit dem Erkenntnisschritt hat man Kompetenz- und Autonomieerfahrungen gemacht, das sind psychische Grundbedürfnisse, die nach der Selbstbestimmungstheorie situationales Interesse stärken (siehe Krapp, 2005); situationales Interesse wiederum motiviert zum epistemischen Weiterhandeln, was dann wieder zu Grenzerfahrungen führen kann, usw. Erfolgreiche direkt Erkenntnis produzierende Handlungen stabilisieren demnach situationales Interesse, und im GEN scheinen sich die psychischen Grundbedürfnisse fachlich zu realisieren.

## **8. Indirekt Erkenntnis produzierende Handlungen**

Neben den direkt Erkenntnis produzierenden Handlungen konnten wir indirekt Erkenntnis produzierende Handlungen rekonstruieren, die die Umgebung erkenntnisfördernd gestalten, z.B. indem Komplexität reduziert wird. Rekonstruiert wurden vier nicht trennscharfe Orientierungen dieser Handlungen:

- *Räumliche* Orientierungen sorgen für einen guten Überblick und schaffen Ordnung im Raum (auf den Arbeitsblättern und Texten usw.)
- *Zeitliche* Orientierungen strukturieren/optimieren den Arbeitsprozess.
- *Soziale* Orientierungen gestalten den sozialen Raum günstig für epistemisches Handeln (z.B. durch Informationsaustausch, Stützen und Wertschätzen der Beiträge des Anderen, Absprachen, ...)
- *Fachliche* Orientierungen sichern die Wissensbasis z. B. durch Fehlerprophylaxe oder setzen Heuristiken ein.

In unseren Untersuchungen führen leistungsstarke Schüler diese Handlungen permanent nebenbei aus und unterstützen damit den eigenen und den gemeinsamen Erkenntnisprozess. Dies gelingt leistungsschwachen Lernenden nicht im gleichen Maße. Die vorliegenden Befunde können aber Anregungen für eine Gestaltung alltäglichen Mathematikunterrichts geben, die allen Lernenden fachliche Erkenntnisprozesse besser zugänglich macht.

## Literatur

- Bikner-Ahsbals, A. & Prediger, S. (2009): Networking theories – an approach for exploiting the diversity of theoretical approaches. In B. Sriraman & L. English (Hrsg.): *Theories of Mathematics Education*. Heidelberg, New York: Springer - Advances in mathematics education series, 483-503.
- Bikner-Ahsbals, A. (2005): *Mathematikinteresse zwischen Subjekt und Situation. Theorie interessendichter Situationen – Baustein für eine mathematikdidaktische Interessentheorie*. Hildesheim, Berlin: Franzbecker div.
- Cramer, J. (2008): *Wissenskonstruktion am Beispiel unendlicher Mengen: eine empirische Analyse*. Examensarbeit. Bremen: Universität Bremen.
- Davydov, V. V. (1990): *Soviet studies in mathematics education: Vol. 2. Types of generalization in instruction: Logical and psychological problems in the structuring of school curricula*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics. (Original: 1972).
- Dubinsky, E. & McDonald, M. (2001): APOS: “A Constructivist Theory of Learning in Undergrad Mathematics Education Research”. In D. Holton (Hrsg.): *The teaching and Learning of Mathematics at University Level: An ICMI Study*, Kluwer Academic Publishers, 273-280.
- Gilmore, G. & Inglis, M. (2008): Process- and Object-based thinking in arithmetic. *Proceedings of the 32th international conference for the Psychology of Mathematics Education (PME32) (Vol. 3)*. Bergen, Norwegen: Bergen University College, 73-80.
- Hershkowitz, R., Schwarz, B. B. & Dreyfus, T. (2001). Abstraction in context: Epistemic actions. *Journal for Research in Mathematics Education* 32, 195-222.
- Kidron, I., Bikner-Ahsbals, A. & Dreyfus, T. (2011): How the general epistemic need (GEN) leads to the need for a new construct: A case of networking two theoretical approaches. Paper presented at CERME 7 (in press).
- Krapp, A. (2005): Basic needs and the development of interest and intrinsic motivation. *Learning and Instruction*, 15, 381-395.
- Krummheuer, G. & Brandt, B. (2001): *Paraphrase und Traduktion*. Weinheim: Beltz Wissenschaft, Deutscher Studien Verlag.
- Priwitzer, J. (2011): *Epistemische Basishandlungen in Modellen zur Konstruktion mathematischen Wissens*. Masterarbeit. Bremen: Universität Bremen.
- Radford (2008). A cultural theory of learning. In L. Radford, G. Schubring & F. Seeger (Hrsg.): *Semiotics in Mathematics Education*. Rotterdam: Sense Publishers, 215-234.
- Schwarz, B. B., Dreyfus, T., & Hershkowitz, R. (2009). The nested epistemic actions model for abstraction in context. In B. B. Schwarz, T. Dreyfus & R. Hershkowitz (Hrsg.), *Transformation of Knowledge through Classroom Interaction*. London, UK: Routledge, 11-41.
- Sfard, A. (1991): On the dual nature of mathematical objects: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics* 22, 1-36.
- Treffers, A., & Goffree, F. (1985). Rational analysis of realistic mathematics education - The Wiskobas program. In L. Streefland (Hrsg.), *Proceedings of the PME9 (Vol. 2)*. Utrecht, Niederlande: OW&OC, 97-121.