Elisabeth RATHGEB-SCHNIERER, Weingarten

Warum noch rechnen, wenn ich die Lösung sehen kann?

Hintergründe zur Förderung flexibler Rechenkompetenzen bei Grundschulkindern

Die Thematik „Förderung flexibler Rechenkompetenzen" ist nicht neu und über die Notwendigkeit, flexibles Rechnen zu fördern herrscht bereits seit längerer Zeit Konsens (z. B. Selter 2000/2003, Anghileri 2001, Lorenz 2002, Schütte 2004). Die Zielrichtung ist klar: Grundschülerinnen und –schüler sollen nicht einfach zum schnellen und akkuraten Rechnen – also zu disziplinierten Rechenmaschinen (Anghileri 2001) – erzogen werden, sondern flexible Rechenkompetenzen entwickeln. Beim Blick in die Theorie, die Forschung und in Mathematikbücher der Grundschule wird deutlich, dass zwar die Desiderate einheitlich sind, nicht aber die Vorstellungen darüber, was mit flexiblem Rechnen gemeint ist; diese werden an vielen Stellen gar nicht explizit genannt.

Versteht man die Rolle von Theorien als „Mittler zwischen Phänomenen des Mathematiklernens und -lehrens und ihrer Forschung" (Prediger 2010, 172[1]) wird deutlich, wie wichtig die Klärung des theoretischen Verständnisses ist. Das Verständnis von flexiblem Rechnen beeinflusst verschiedene Bereiche: die Forschung, die Entwicklung und die Unterrichtspraxis. Je nach Definition werden unterschiedliche Perspektiven auf das flexible Rechnen eröffnet und damit auch jeweils eine bestimmte Realität konstituiert.

Blick in die Theorie

Das Ziel der nachfolgenden Klärung besteht darin, vorhandene explizite und implizite theoretische Annahmen zum flexiblen Rechnen herauszuarbeiten. In diesem Zusammenhang stellt sich zunächst die Frage, wie der komplexe Prozess der Lösung einer Rechenaufgabe abläuft.

1. Ebenen des Lösungsprozesses

In Anlehnung an verschiedene Autoren, die sich mit Vorgehensweisen beim additiven Rechnen beschäftigt haben (z.B. Krauthausen 1993, Radatz u.a. 1998, Selter 2000, Threlfall 2009, Wittmann 1999), lässt sich folgen-

---

[1] Prediger, Susanne (2010): Über das Verhältnis von Theorien und wissenschaftlichen Praktiken – am Beispiel von Schwierigkeiten mit Textaufgaben. In: Journal für Mathematik-Didaktik, 31(2), 167-195.

des Modell zur Beschreibung des Lösungsprozesses entwickeln: Das Lösen von Aufgaben ist ein komplexes Zusammenspiel von verschiedenen Ebenen, denen unterschiedliche Rollen zukommen und die einen unterschiedlichen Explikationsgrad aufweisen (vgl. Abb. 1).

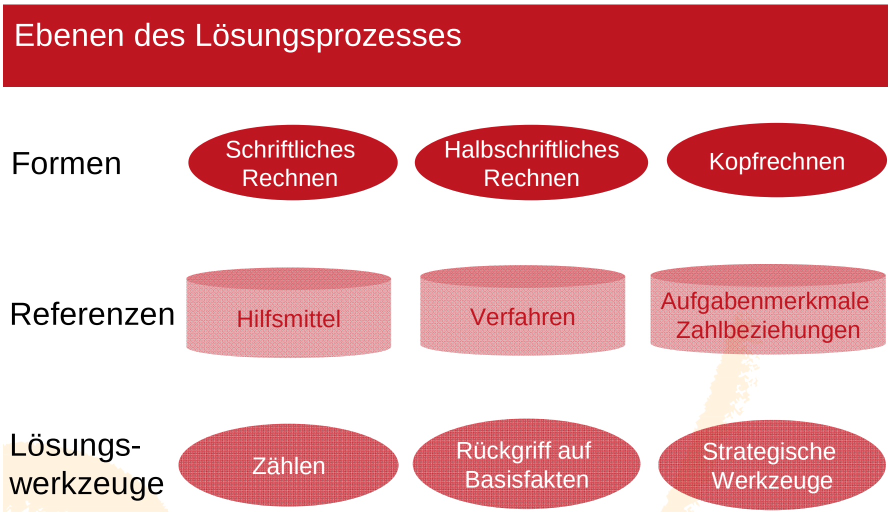

Abbildung 1

Formen: Im Lösungsprozess kann auf verschiedene Formen des Rechnens zurückgegriffen werden, wie das schriftliche Rechnen, das halbschriftliche Rechnen und das Kopfrechnen. Die von einem Kind genutzten Formen sind für den Beobachter deutlich sichtbar, sie allein reichen aber zum Lösen einer Aufgabe aber nicht aus.

Referenzen: Jedem Lösungsprozess liegen bestimmte Erfahrungen zugrunde, die hier mit dem Begriff „Referenzen" gefasst werden. So kann sich das Lösungsvorgehen eines Kindes beispielsweise auf Hilfsmittel stützen, die konkret genutzt oder mental vorgestellt werden. Ebenso können gelernte Verfahren oder erkannte Aufgabenmerkmale und genutzte Zahlbeziehungen der Referenzkontext eines Lösungsprozesses sein. Häufig ist es schwierig, den Referenzkontext anhand eines Lösungsweges zu rekonstruieren, wie Tanjas Lösungsweg zur Aufgabe 46 – 19 zeigt:

T: Ähm 46 (.) minus (..) 9 - nein, minus 6 mach ich jetzt (…) und dann sind das ja 40, und dann minus 3 sind s i e b e n u n d dreißig, und dann noch minus 10 sind 27.

Tanja zerlegt den Subtrahenden und zieht ihn sukzessive vom Minuenden ab. Ob Tanjas Vorgehen auf einem gelernten Verfahren, auf erkannten Aufgabenmerkmalen und genutzten Zahlbeziehungen oder auf der Kombination von beidem basiert, kann anhand des explizierten Lösungsweges nicht erschlossen werden.

Lösungswerkzeuge: Die Referenzebene ist noch keine Ebene der konkreten Lösung. Die Lösung einer Aufgabe erfolgt, indem im Rahmen des Referenzkontextes Lösungswerkzeuge genutzt und kombiniert werden. Lösungswerkzeuge sind das Zählen, der Rückgriff auf Basisfakten und das Nutzen von strategischen Werkzeugen. Ich verwende hier den Begriff „strategisches Werkzeug“ und grenze ihn vom Begriff „Strategien“ ab. Während der Begriff „Strategien“ in der mathematikdidaktischen Literatur häufig im Sinne fertiger Lösungswege verwendet wird (z. B. „Hauptstrategien des Zahlenrechnens“ bei Selter 2000, 231), meine ich mit strategischen Werkzeugen solche, mit denen Aufgaben verändert oder vereinfacht werden können. Dazu gehören das Zerlegen und Zusammensetzen von Zahlen, das gleich- und gegensinnige Verändern sowie das Nutzen von Hilfsaufgaben und Analogiewissen.

Beim Lösen von Aufgaben werden die verschiedenen Ebenen kombiniert und je nach Kombination können verschiedene Kompetenzen der Kinder rekonstruiert werden. Im Hinblick auf flexible Rechenkompetenzen besteht ein wesentlicher Unterschied darin, ob ein Kind beim Kopfrechnen seinen Lösungsprozess auf ein gelerntes Verfahren oder auf erkannte Aufgabenmerkmale und Zahlbeziehungen stützt, wie dies beispielsweise bei Simones Lösungsweg zur Aufgabe 46 - 19 der Fall zu sein scheint:

S: Wenn ich da plus mach, (*zeigt auf die Aufgabe*) dann hab ich 20 und da 47 und dann ist die leichter zum Rechnen.

I: Welche Aufgabe rechnest du denn dann?

S: 47-20. Dann kommt 26 (.) nee 27.

I: Und du bist jetzt ganz sicher, dass bei 47-20 das Gleiche rauskommt wie bei 46-19?

S: Ja, weil äh ich plus eins dazugenommen habe und dann ist da mehr und ich nehme da mehr weg.

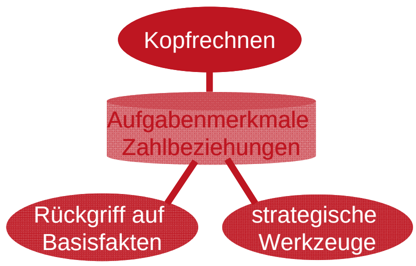

Abbildung 2

In Simones Lösungsweg lassen sich verschiedene Lösungswerkzeuge erkennen: Sie verändert die Ausgangsaufgabe gleichsinnig zur Aufgabe 47 – 20. Diese löst sie vermutlich durch eine Kombination von Analogiewissen und Rückgriff auf Basisfakten. Da sie ihr Vorgehen begründen kann, ist anzunehmen, dass ihr Referenzkontext das Erkennen und Nutzen von Aufgabenmerkmalen und Zahlbeziehung ist (vgl. Abb. 2).

2. Flexibles Rechnen

Flexibles Rechnen wird in der Literatur nicht einheitlich definiert, aber es kristallisieren sich zwei grundlegende Richtungen heraus.

Viele Arbeiten stützen sich auf das Modell der Strategiewahl (Siegler & Lemaire 1997), wobei teilweise eine Unterscheidung zwischen Flexibilität und Adäquatheit vorgenommen wird (Heinze et. al. 2009a): Unter Flexibilität wird dann die Fähigkeit, zwischen verschiedenen Strategien auszuwählen, verstanden. Adäquatheit zielt auf die Fähigkeit ab, eine passende Strategie zu wählen. Torbeyns und Kollegen (2009) fassen beide Aspekte in ihrer Definition zusammen und beschreiben flexibles Rechnen als Fähigkeit, zwischen verschiedenen Strategien die für die Lösung der Aufgabe am besten passende (bewusst oder unbewusst) auszuwählen.

Eine kritische Auseinandersetzung mit dem Modell der Strategiewahl findet sich in den theoretischen Arbeiten zum flexiblen Rechen von Threlfall (2002/2009). Er betont: „However, there are difficulties with the notion of strategic choice as an explanatory model for strategic flexibility at the calculation-flexibility level, and it seems appropriate to seek an alternative" (Threlfall 2009, 554)[2]. Die von ihm beschriebene Alternative möchte ich im Folgenden als „Modell der Emergenz" bezeichnen. Threlfall (2002) betont, dass eine Strategie im Sinne eines kompletten Lösungswegs nicht gewählt wird, sondern emergiert. Flexibles Rechnen kann dementsprechend als situationsbedingtes, individuelles Reagieren auf spezifische Aufgabenmerkmale und die entsprechende Konstruktion eines Lösungsvorgehens unter Nutzung strategischer Werkzeuge beschreiben werden (Rathgeb-Schnierer 2010).

Verknüpft man diese beiden Definitionslinien mit den oben dargestellten Ebenen des Lösungsprozesses (vgl. Abb. 1), so stellt sich eine Verbindung wie folgt dar:

- Strategiewahl kann sich auf die Ebene der Formen oder der Lösungswerkzeuge beziehen. Dementsprechend wird ein Kind dann als flexibler Rechner betrachtet, wenn es eine adäquate Form und innerhalb dieser ein adäquates Lösungswerkzeug wählen kann. Allerdings richten die meisten Forschungsarbeiten ihren Blick ausschließlich auf die Ebene der Lösungswerkzeuge.
- Beim Modell der Emergenz spielt die Verbindung der Ebenen „Lösungswerkzeuge" und „Referenzen" eine wichtige Rolle, weil davon ausgegangen wird, dass Lösungswege abhängig von den im Prozess

[2] Threlfall, John (2009): Strategies and flexibility in mental calculation. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, 41(5), 541–555.

erkannten Aufgabenmerkmalen und Zahlbeziehungen emergieren. Als flexibler Rechner wird nur das Kind bezeichnet, das sich eben nicht auf ein gelerntes Verfahren stützt, sondern auf erkannte Aufgabenmerkmale und Zahlbeziehungen.

Mit beiden Modellen sind ganz spezifische Merkmale und Herausforderungen verknüpft:

- Nutzt man das Modell der *Strategiewahl* als Erklärungsmodell für flexibles Rechnen, werden Gesichtspunkte wie das Strategierepertoire sowie die Häufigkeit, Effektivität und Adäquatheit von genutzten Strategien betrachtet (Siegler & Lemaire 1997). Der Fokus liegt auf der Art der Lösung: Wie viele verschiedene Strategien nutzt ein Kind beim Lösen von Aufgaben? Wie häufig werden einzelne Strategien genutzt? Sind die genutzten Strategien effektiv und aufgabenadäquat? Erklärt man flexibles Rechnen über die Adäquatheit eines Lösungsweges, sind damit verschiedene Herausforderungen verbunden. Einmal muss definiert werden, welches der adäquate Lösungsweg für eine bestimmte Aufgabe ist und welche Kriterien bei der Auswahl relevant sind (Heinze et. al. 2009a, Steinberg 1985, Threlfall 2002). Zum anderen stellt sich die Frage, ob die Wahl eines adäquaten Lösungsweges nicht auch auf der Anwendung eines gelernten Verfahrens beruhen kann. Wenn dies der Fall ist, kann dann noch von flexiblem Rechnen gesprochen werden oder handelt es sich nicht vielmehr um die routinemäßige Anwendung eines Verfahrens (Threlfall 2009)?
- Nutzt man das Modell der Emergenz als Erklärungsmodell für flexibles Rechnen, so werden Aspekte wie das Zahl- und Operationswissen, das Erkennen von Zahlen- und Aufgabenmerkmalen und die entsprechende Nutzung und Kombination strategischer Werkzeuge relevant (Heirdsfield & Cooper 2004, Schütte 2004, Threlfall 2009). Diese Aspekte werden nicht durch die Art der Lösung sichtbar und deshalb muss der Blick auf das Vorgehen bei der Lösung, also den Lösungsprozess gerichtet werden: Erkennt ein Kind Aufgabenunterschiede? Werden dementsprechend strategische Werkzeuge genutzt? Werden strategische Werkzeuge innerhalb eines Lösungsweges kombiniert? Werden Lösungswege begründet? Auch wenn man flexibles Rechnen damit erklärt, dass im Lösungsprozess Aufgabenmerkmale erkannt und der Lösungsweg unter Nutzung passender strategischer Werkzeuge konstruiert wird, gibt es spezifische Herausforderungen. Einmal stellt sich die Frage, wie man die internen Lösungsprozesse von Kindern offenlegen kann und zum anderen, woran sich zeigt, dass ein

Kind Aufgabenmerkmale im Lösungsprozess erkennt und entsprechende strategische Werkzeuge nutzt (Rathgeb-Schnierer 2010).

Blick in die Forschung

In den vergangenen zehn Jahren wurde eine ganze Reihe von Forschungsarbeiten publiziert, die sich mit Fragen zum flexiblen Rechnen beschäftigen. In Form eines kurzen Überblicks lassen sich die Ergebnisse wie folgt zusammenfassen:

- Schülerinnen und Schüler zeigen beim Lösen von Aufgaben kaum aufgabenadäquates Handeln. Unabhängig von deren Effektivität, bevorzugen sie schriftliche Algorithmen (Selter 2000, Benz 2007).
- Das Rechnenlernen über Musterlösungen wirkt sich negativ auf die Entwicklung flexibler Rechenkompetenzen aus (Beishuizen & Klein 1998, Heirdsfield & Cooper 2004, Schütte 2004).
- Lösungswege hängen nicht in erster Linie von Aufgabentypen ab, sondern vielmehr von speziellen Zahlenmerkmalen einer Aufgabe (Blöte et. al. 2000, Torbeyns et. al. 2009) und von der Zahlwahrnehmung im Lösungskontext (Rathgeb-Schnierer 2010).
- Flexible Rechner verfügen über aspektreiches Zahlwissen, Zahl- und Operationsverständnis, beherrschen Basisfakten und zeigen im Hinblick auf das Fach Mathematik Selbstvertrauen und eine positive Einstellung (Heirdsfield & Cooper 2002/2004, Hope 1987, Threlfall 2002). Zudem erkennen sie Aufgabenmerkmale und Zahlbeziehungen und nutzen diese beim Lösen von Aufgaben (Macintire & Forrester 2003, Rathgeb-Schnierer 2010, Schütte 2004, Threlfall 2009).
- Die Entwicklung eigener Lösungswege sowie die Entwicklung von Flexibilität kann durch entsprechende Unterrichtsansätze, z. B. das Lernen auf eigenen Wegen anhand komplexer Aufgabenstellungen, gefördert werden (Beishuizen & Klein 1998, Fuson & Burghardt 2003, Heinze et. al. 2009b, Rathgeb-Schnierer 2006).

Betrachtet man die referierten Forschungsarbeiten, so wird deutlich, dass sie sich explizit oder implizit auf eines der beiden zuvor dargestellten theoretischen Erklärungsmodelle stützen. Es zeigt sich zudem, wie sich die zwei verschiedenen theoretischen Grundlinien auf die Art der Fragestellung, die Methoden der Erforschung und die Rückbindungen der Ergebnisse in die Theorie auswirken. Forschungsarbeiten, die sich auf das Strategiewahlmodell beziehen, fokussieren die adäquate Wahl von Lösungswerkzeugen und nutzen vorwiegend quantitative Methoden (z. B. Blöte et-al. 2000, Torbeyns et. al. 2009, Verschaffel et. al. 2007). Arbeiten, denen das Emergenzmodell zugrunde liegt, richten ihren Blick auf den Lösungsprozess und dessen Referenzkontext und nutzen dafür qualitative Methoden (z. B. Heirdsfield & Cooper 2002/2004; Rathgeb-Schnierer 2006). Die zwei unterschiedlichen theoretischen Zugänge können dementsprechend als „Brillen“ verstanden werden, die einerseits verschiedene Ausschnitte des komplexen Konstrukts „flexibles Rechnen“ fokussieren und damit Forschungspraxis und Erkenntniswege öffnen, anderseits gleichzeitig den Blick auch einengen und somit Erkenntniswege begrenzen (Prediger 2010). Sie beeinflussen sowohl die Art der Fragestellung als auch das, was als Antwort auf diese Fragestellung betrachtet wird.

Blick in die Entwicklung

Beim abschließenden Blick in die Entwicklung wird zwei Fragen nachgegangen: Worüber müssen Kinder verfügen, um flexibel rechnen zu können? Wie vollzieht sich die eigenständige Rechenwegsentwicklung?

Die nachfolgenden Antworten beziehen sich auf Ergebnisse einer Fallstudie zur Entwicklung flexibler Rechenkompetenzen von Schülerinnen und Schülern des zweiten Schuljahrs (Rathgeb-Schnierer 2006/2010). Basierend auf dem Modell der Emergenz lag das Forschungsinteresse auf den Lösungsprozessen der Kinder. Zur Datenerhebung wurden zu drei verschiedenen Zeitpunkten Interviews mit den Kindern (n=20) durchgeführt und anhand eines sytematisch-extensionalen Interpretationsverfahren ausgewertet (Beck & Maier 1994).

Bei der Auswertung der Daten haben sich unsere Vorannahmen bestätigt, dass Rechenwege von soliden Kenntnissen der Basisfakten, vom Wissen über Zahlen und Operationen und vom Verfügen über strategische Werkzeuge abhängen (vgl. Abb. 3). Wir konnten aber auch viele Verhaltensweisen beim Lösen von Aufgaben beobachten, die sich mit den oben genannten Einflussfaktoren nicht erklären ließen. Beispielsweise, warum ein Kind zwei strukturgleiche Aufgaben mit Hilfe verschiedener Lösungswerkzeuge löst oder sein Lösungsvorgehen im Prozess plötzlich verändert[3].

Bei der Analyse dieser mit den bisherigen Grundannahmen nicht zu erklärenden Verhaltensweisen zeigte sich ein weiterer Einflussfaktor auf interne Rechenwege: Interne Rechenwege werden entscheidend von den im konkreten Fall erkannten spezifischen Aufgaben- und Zahleigenschaften beeinflusst (Blöte et al. 2000). Dieses individuelle und momentane Erkennen

---

[3] Eine Zusammenfassung der Studie ist nachzulesen in: Rathgeb-Schnierer, E. (2010). Entwicklung flexibler Rechenkompetenzen bei Grundschulkindern des 2. Schuljahrs. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 31(2), 257-283.

bezeichne ich als Wahrnehmung von Zahlen und Aufgaben (vgl. Abb. 3). Ob die erkannten Eigenschaften im Lösungsprozess Anwendung finden können, hängt mitunter vom Wissen über die Regeln im Umgang mit Zahlen und Operationen sowie von den individuellen Zahlpräferenzen ab (Selter 1999).

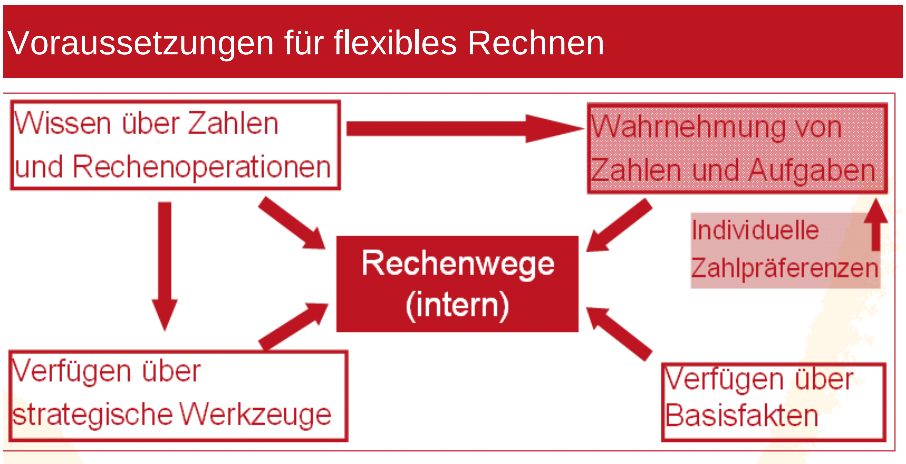

Abbildung 3

Die dargestellten Voraussetzungen für flexibles Rechnen geben einen Hinweis darauf, welche Art von Aktivitäten im Unterricht zum Tragen kommen sollte. Grundsätzlich ist es wichtig, alle vier Bereiche zu fördern (vgl. Abb. 3). Besonderes Augenmerk sollte m.E. auf den Bereich „Wahrnehmung von Zahlen und Aufgaben“ gelegt werden, der in aktuellen Schulbüchern vielfach keine oder nur eine untergeordnete Rolle spielt. Dieser Bereich kann durch kontinuierliche Aktivitäten zur Schulung des Zahlenblicks (Schütte 2008) gefördert werden. Sie zielen darauf ab, dass Aufgaben nicht sofort gerechnet, sondern im Hinblick auf ihre inhärenten Merkmale, auf ihre Struktur und Beziehungen zu den anderen Aufgaben betrachtet werden (Rathgeb-Schnierer 2008, Rechtsteiner-Merz 2011).

Die Entwicklung der internen Rechenwege in Richtung Flexibilität erfordert neben geeigneten Aktivitäten auch den entsprechenden Unterrichtsrahmen. In der o. g. Studie hat sich gezeigt, dass die eigenständige Entwicklung von Rechenwegen sowie deren Artikulation und Austausch zentrale Entwicklungsfaktoren darstellen. Dementsprechend bedarf es einer Lernumgebung, die durch geeignete Angebote einerseits die eigene Auseinandersetzung der Kinder anregt und andererseits zum Austausch von Lösungswegen und Erfahrungen herausfordert (Rathgeb-Schnierer 2006).

Literatur

Die Liste mit der im Text angeführten Literatur kann bei der Autorin per Email angefordert werden: rathgeb-schnierer@ph-weingarten.de