

Alexander RENKL Freiburg

## **Aktives Lernen in Mathematik: Von sinnvollen und weniger sinnvollen Konzeptionen aktiven Lernens**

### **1. Einleitung**

Viele instruktionale Maßnahmen und Unterrichtsmethoden für das Mathematiklernen werden unter anderem damit begründet, dass sie zu aktivem Lernen führen (z. B. "Inquiry-Ansätze" oder Gruppenarbeiten). Doch was ist mit aktivem Lernen genau gemeint, und ist es immer sinnvoll? Oder anders formuliert: Welche Formen aktiven Lernens sind sinnvoll?

Obgleich aktives Lernen typischerweise als effektives Lernen angesehen und als Gegenentwurf zum (passiven) Lernen in traditionellen Lernformen verstanden wird (siehe Renkl, in Druck), wird selten eine explizite Definition gegeben. Entsprechend wird dieser Begriff ganz unterschiedlich verwendet. Ziel dieses Beitrags ist es, drei typische Sichtweisen zum aktiven Lernen vorzustellen und kritisch zu bewerten. Bei der Beurteilung dieser Sichtweisen wird eindeutig Stellung bezogen. Dabei wird von bestimmten Voraussetzungen ausgegangen, die an dieser Stelle explizit werden.

Erstens geht es in diesem Beitrag um den Erwerb "inhaltlichen" Wissens, nicht um andere Lernziele, wie etwa Veränderung "mathematischer Weltbilder" oder Fertigkeiten der Selbststeuerung. Es wird der Erwerb von verständniskonstituierendem Wissen zu mathematischen Konzepten, Algorithmen und Heuristiken (z. B. im Bereich des Beweisens) betrachtet. Zweitens wird als Ziel anwendbares Wissen gesehen, das aus integrierten mentalen Repräsentationen von einerseits (abstrakten) Konzepten und Prinzipien und andererseits Problemsituationen einschließlich der Lösungen (Instanzierungen) besteht (siehe Renkl, 2011). Es geht also darum, dass ein Schüler z. B. in der Wahrscheinlichkeitsrechnung wichtige Konzepte (z. B. unabhängige Ereignisse) und Prinzipien (z. B. Multiplikationssatz) kennt und zudem weiß, wie diese Konzepte und Prinzipien in Problemsituationen (z. B. bei der Analyse von Glücksspielen) einzusetzen sind. Bei der folgenden Lektüre sollten diese Voraussetzungen im Hinterkopf behalten werden.

Nach Renkl (2009; in Druck) lassen sich drei Perspektiven unterscheiden: Perspektive des aktiven Tuns, Perspektive der aktiven Informationsverarbeitung und Perspektive der fokussierten Informationsverarbeitung.

### **2. Perspektive des aktiven Tuns**

Diese Perspektive betrachtet insbesondere offene Lernaktivitäten, so etwa aktives Problemlösen, Hands-on-Aktivitäten oder Teilnahme an fachlichen

Diskussionen mit Peers, als besonders lernförderlich (vgl. Greeno, 2006; Lave, 1996). Sie wird typischerweise von Ansätzen vertreten, die sich als *konstruktivistisch* (z. B. im Sinne Piagets), *sozialkonstruktivistisch* (z. B. unter Bezug auf Vygotsky) oder *situiert* (z. B. Greeno, 2006; Lave, 1996) bezeichnen. Insbesondere „situierte Ansätze“ postulieren, dass Wissen nicht aus für sich stehende Entitäten in Kopf besteht, sondern mit *Aktivitäten* verbunden ist (z. B. Barab et al., 2008). Diese Aktivitäten sind wiederum an konkrete Situationsklassen gebunden. Damit sind auch Wissen und Lernen situiert (Greeno, 2006). Vor diesem Hintergrund soll zu erwerbendes Wissen in Aktivitätsmuster „eingebaut“ erworben werden, die zu Situationen der Anwendung passen. Um sich entsprechende Aktivitätsmuster anzueignen, sollten Lernende aktiv an "authentischen" Diskursen und Problemlöseprozessen teilnehmen (z. B. Greeno, 2006; Lave, 1996).

Akzeptiert man die Annahme, dass Lernen ein Prozess ist, der sich im Kopf (Gehirn) vollzieht, ist es problematisch, Kriterien darüber, ob effektives Lernen stattfindet, primär an offenen Aktivitäten festzumachen. Wird dies dennoch gemacht (vgl. z. B. Chi, 2009), so muss man die (zumindest implizite) naive Annahme einer 1:1-Korrespondenz zwischen äußerlich sichtbaren Lernaktivitäten und dem, was im Kopf der Lernenden passiert, unterstellen (Renkl, 2009). Ein eindrückliches Beispiel, dass dies beim Mathematiklernen nicht so sein muss, stammt von Pauli und Lipowsky (2007). Die verbale Beteiligung der Schüler am Unterricht, die von den Autoren als aktive Partizipation beim Lernen angesehen wird, sagt nicht den Lernerfolg vorher. Vermeintlich aktive Schüler lernten also nicht mehr. Ein weiterer empirischer Befund stammt von Renkl (1996). Er zeigte, dass Lernen durch Lehren – ein „Paradebeispiel“ für aktives Lernen aus der Perspektive des aktiven Tuns – die Lernenden in Stress versetzen und sie überfordern kann, wenn sie erst begonnen haben, sich einen Stoffbereich zu erschließen. Diejenigen, die nach einer ersten Selbstlernphase den Stoff (hier: Wahrscheinlichkeitsrechnung) anderen erklärten, die dieselbe Selbstlernphase gerade hinter sich gebracht hatten, lernten weniger als die Zuhörenden. Die "passiven" Zuhörenden erwarben also mehr Wissen.

Zusammengefasst weist die Perspektive des aktiven Tuns theoretische Probleme auf und sie steht im Widerspruch zu empirischen Befunden. Für weitere für diese Perspektive problematische Befunde und theoretische Analysen siehe Leuders und Holzäpfel (in Druck) sowie Renkl (in Druck).

### **3. Perspektive der aktiven Informationsverarbeitung**

Aus der kognitionspsychologisch "inspirierten" Perspektive der aktiven Informationsverarbeitung ist vor allem die tiefe mentale Verarbeitung von

Information bzw. von Lernstoff entscheidend (vgl. den Begriff des kognitiv aktivierenden Unterrichts; z. B. Baumert et al., 2010). Damit ist nicht die offene Aktivität entscheidend, sondern die mentale stoffbezogene Aktivität. Auch dies entspricht einer konstruktivistischen Grundauffassung, da nicht angenommen wird, dass das Wissen direkt vermittelt oder übertragen werden kann, vielmehr müssen die Lernenden aktiv Information interpretieren und daraus Wissen konstruieren (Renkl, 2009, in Druck).

Die Perspektive der aktiven Informationsverarbeitung kommt nicht in jedem Fall zu anderen Bewertungen von Lernarrangements als die des aktiven Tuns. Zwar ist die aktive Informationsverarbeitung entscheidend, oftmals wird aber angenommen, dass offene Aktivitäten (z. B. Explorieren) lernförderlich sein können. Die Lernförderlichkeit wäre aber immer über die Induktion mentaler Verarbeitungsprozesse (z. B. Hypothesenbilden und –testen) vermittelt (vgl. Chi, 2009). Allerdings wird auch ins Kalkül einbezogen, dass offene Aktivitäten (z. B. Problemlösen) der stoffbezogenen mentalen Aktivität abträglich sein können (vgl. die Befunde von Renkl, 1996, zu den Effekten des Erklärens).

Den vielfach in der Forschung verwendeten Lernstrategiefragebögen liegt ebenfalls diese Perspektive zugrunde. Sie thematisieren –zumindest bei Skalen zu primären Lernstrategien, die direkt mit der Wissenskonstruktion in Zusammenhang stehen – im Prinzip lernförderliche mentale Aktivitäten (z. B. eigene Beispiele suchen, Analogien ziehen oder Hauptpunkte identifizieren) und fragen ab, ob Lernende diese einsetzen (z. B. Schukajlow & Leiss, 2011). Je mehr eine Person angibt, entsprechende Aktivitäten einzusetzen, einen umso höheren („günstigen“) Kennwert erhält sie. Es kann jedoch angezweifelt werden, dass es wirklich sinnvoll, wenn ein Lernender beim Lernen möglichst viele der zahlreichen im Fragebogen genannten Lernstrategien einsetzt. Zumindest die typischerweise sehr schwachen Zusammenhänge zwischen solchen Fragebogenmaßen und Lernerfolg (z. B. Jamieson-Noel & Winne, 2003; Schukajlow & Leiss; 2011) legen nahe, dass ein pures "Mehr" an solchen kognitiven Aktivität nicht unbedingt optimal ist (siehe Glogger, Schwonke, Holzäpfel, Nückles & Renkl, 2011)..

Als zweites Beispiel für die Problematik der Perspektive der aktiven Informationsverarbeitung dienen die Befunde von Hilbert, Renkl, Kessler und Reiss (2008). Sie gaben Erstsemestern komplexe Lösungsbeispiele vor, anhand derer heuristische Vorgehensschritte für das Finden mathematischer Beweise erlernt werden konnten (dabei ging es „nur“ um das Finden einer Beweisidee und deren Absicherung durch eine argumentative Kette, nicht um die formale Ausarbeitung eines Beweises). Diese heuristischen Vorgehensschritte wurden an geometrischen Inhalten exemplifiziert. Die Lernen-

den mussten somit auch geometrische Inhalte verstehen, um die Heuristiken nachzuvollziehen. Entsprechend wurden zwei Maßnahmen zur "Aktivierung" implementiert bzw. experimentell variiert. Zum einen wurden auszufüllende Lücken in die geometrischen Teile der Lösungsbeispiele eingebaut (z. B. „Ein Punkt-Spiegelung entspricht einer Rotation um \_\_\_ Grad.“); zum anderen wurden die Lernenden nach entsprechenden Abschnitten der Lösungsbeispiele über Prompts („Leitfragen“) aufgefordert niederzuschreiben, welcher heuristische Schritt gerade vollzogen wurde und warum. Letztgenannte Maßnahmen sollten den Fokus auf die heuristischen Schritte lenken. Um den Lernerfolg zu ermitteln, wurde das konzeptuelle Wissen über Beweisen erfasst und es wurden Beweisaufgaben gestellt (Beweisfertigkeiten). Für den gleichzeitigen Erwerb von konzeptuellem Wissen und Beweisfertigkeiten war die Lernbedingung mit Prompts zu den Beweisschritten und ohne Geometrielücken am effektivsten. Das Lernen war also nicht dann am erfolgreichsten, wenn möglichst viele Anregungen zur aktiven Verarbeitung gegeben wurden (Prompts und Lücken), sondern wenn das fokussiert wurde (nur Prompts), was „im Kern“ gelernt werden sollte; dies war eben das Finden und Überprüfen einer Beweisidee.

Zusammengefasst kann es bezweifelt werden, ob das pure Aktivieren lernstoffbezogener Informationsinformation optimal ist (zu einer weitergehenden Erörterung siehe Renkl, 2009, in Druck). Um diesem Problem Rechnung zu tragen, wird im nächsten Abschnitt die Perspektive der fokussierten Informationsverarbeitung vorgestellt.

#### **4. Perspektive der fokussierten Informationsverarbeitung**

Die Perspektive der fokussierten Informationsverarbeitung steht nicht im grundsätzlichen Widerspruch zu derjenigen der aktiven Informationsverarbeitung; sie differenziert diese vielmehr aus. Es wird postuliert, dass effektives Lernen darin besteht, dass bei der aktiven Informationsverarbeitung die zentralen Konzepte und Prinzipien fokussiert werden (Renkl, 2009, in Druck). Maßnahmen, die bei den Lernenden Informationsverarbeitung hinsichtlich nicht zentraler Lernziele induzieren, sind eher hinderlich als produktiv aktivierend, wie dies exemplarisch die Befunde von Hilbert et al. (2008) zeigen (negative Effekte von "aktivierenden Lücken" in geometrischen Inhalten beim Erlernen des Beweisens).

Im Folgenden werden drei Beispiele aus eigener Forschung vorgestellt, die zeigen, wie fokussierte Informationsverarbeitung gefördert werden kann. Das erste Beispiel greift die Funktion von Selbsterklärungsprompts beim Lernen aus Lösungsbeispielen auf. Die grundlegende Logik des Lernens aus Lösungsbeispielen besagt, dass Lernende zunächst Lösungswege ver-

standen haben sollten, bevor sie selbst Aufgaben bearbeiten, um „mechanisches“ Vorgehen zu vermeiden und verstehensorientiertes Bearbeiten von Aufgaben zu ermöglichen (Renkl, 2011). Entsprechendes Verständnis kann dadurch gefördert werden, dass die Lernenden beim Beispielstudium angeleitet werden, sich das Beispiel mit Bezug auf die zugrundeliegenden zentralen Konzepte und Prinzipien zu erarbeiten (d.h. sich selbst zu erklären). So sollen Lernende z. B. bei einem Lösungsschritt angeben, welcher wahrscheinlichstheoretische Satz ihm zugrunde liegt. Wir konnten in einer Reihe von Studien zeigen (z. B. Berthold, Eysink & Renkl, 2008), dass solche Prompts bei geeigneten Lernvoraussetzungen, die ein weitgehend erfolgreiches Bearbeiten dieser Anforderung erlauben (Berthold & Renkl, 2009), Verständnis und Transfer bei Mathematiklernen fördern.

Ein zweites Beispiel bezieht sich auf die Nutzung multipler externaler Repräsentationen (Darstellungssysteme) beim Mathematiklernen. Nach einer weit verbreiteten naiven Annahme wird mehr gelernt, wenn mehr unterschiedliche Darstellungsarten vorgegeben werden (z. B. Gleichung und Abbildung statt nur Gleichung). Lernende sind aber sehr oft mit der Nutzung unterschiedlicher Repräsentationen überfordert, so dass diese bisweilen sogar abträglich sein können (Ainsworth, 2006). Schwonke, Berthold und Renkl (2009) fanden, dass sich selbst bei fortgeschrittenen Lernenden (Psychologiestudierende) kaum Anzeichen dafür finden, dass sie multiple Repräsentationen in dem Sinne nutzten, wie es entsprechende Theorien als nützlich erachteten (z. B. Ainsworth, 2006). Wenn man sich fragt, woher denn die Lernenden wissen sollten, was sich z. B. Instruktionsdesigner denken, wenn sie multiple Repräsentation vorgeben, erscheint dieser Befund wenig überraschend. Eine nahe liegende Konsequenz ist es, die Lernenden einfach entsprechend zu informieren. Schwonke et al. (2009) testeten, ob Lernende davon profitieren, wenn man sie kurz (1-2 Minuten) darüber aufklärt, wie man in einem mathematischen Lernprogramm die multiplen Repräsentation nutzen sollte. Es wurde dargelegt, dass bei Lösungsbeispielen aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung die vorgegebenen Baumdiagramme quasi als Brücke benutzt werden sollten, um zu verstehen, wie man vom Problemtext der Aufgabenstellung zur Gleichung kommt. Diese sehr sparsame Intervention hatte substantielle positive Effekte auf den Lernerfolg. Schwonke et al. (2009) haben also die Lernenden darüber informiert, wie sie gezielt bzw. fokussiert multiple Repräsentationen nutzen können, und dies hat den Lernerfolg bedeutsam erhöht.

Das dritte Beispiel greift ebenfalls das Lernen aus Lösungsbeispielen auf. Statt die Lernenden sich die Beispiele selbst erklären zu lassen, kann man ihnen auch entsprechende instruktionale Erklärungen geben. Allerdings

erweist sich diese Option oft als problematisch (Renkl, 2011), wofür mehrere Faktoren verantwortlich gemacht werden können. Unter anderem verarbeiten die Lernenden die instruktionalen Erklärungen vielfach nur oberflächlich. Berthold und Renkl (2010) benutzten deshalb Prompts, die eine Weiterverarbeitung von instruktionalen Erklärungen in Hinblick auf eine fokussierte Verarbeitung zentraler Prinzipien (mathematischer Sätze) induzierten. Dabei mussten die Lernenden Fragen zu den Erklärungen beantworten, die sich insbesondere auf die zugrunde liegenden Sätze aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung und deren Rationale bezogen. Mit diesen Prompts wurde der Lernerfolg deutlich erhöht.

Zusammengefasst betont die Perspektive der fokussierten Verarbeitung, dass es ausschlaggebend ist, ob die zentralen Konzepte und Prinzipien fokussiert und in korrekter Weise erworben werden. Entsprechend gestaltete Prompts sind eine Möglichkeit, fokussierte Verarbeitung zu induzieren.

## **5. Zum Abschluss: Antworten auf mögliche kritische Einwände**

Gegen die vorgebrachte Position kann ich eine Reihe von Einwänden antizipieren; drei naheliegende werden hier aufgegriffen. Erstens könnte man vorbringen, dass man beim problemorientierten Lernen, dessen Nutzen doch gut belegt ist, zunächst eine unfokussierte Aktivität induziert, in den Sinne als man nicht gleich zu den zentralen Konzepten und Prinzipien vorstößt. Das stimmt, aber die empirisch gut bewährten Ansätze des problemorientierten Lernens nutzen eine vergleichsweise kurze Phase der unfokussierten Aktivität gerade dazu, die Fokussierung in einer anschließenden Lernphase zu erhöhen (z. B. Schmidt, de Grave, de Volder, Moust & Patel, 1989; Schwartz & Martin, 2004).

Zweitens könnte man einwenden, dass Lernformen wie entdeckendes Lernen (Inquiry Learning) nicht nur den Erwerb mathematischen Inhaltswissen fördern, sondern auch allgemeinere Fertigkeiten wie Hypothesentesten oder Selbstregulation. Dass entdeckendes Lernen durchaus erfolgreich sein kann, wenn es gut strukturiert wird, so dass die Aufmerksamkeit der Lernenden auf Zentrales fokussiert wird, sei unbestritten (z. B. Alfieri, Brooks, Aldrich & Tenenbaum, 2011). Dass Lernende beim Entdecken ausgereicht so anspruchsvolle Lernziele wie Hypothesentesten oder Selbstregulation in substantiellem Ausmaß quasi nebenbei erreichen, dafür kenne ich keinen überzeugenden Beleg. Nutzt man entdeckendes Lernen, um etwa Selbstregulation zu fördern – wogegen sicherlich nichts einzuwenden ist –, müssen die Lernenden explizit darauf fokussiert werden - wohl dann allerdings auf Kosten anderer Lernziele.

Drittens könnte man die Gefahr einer „Überdidaktisierung“ sehen, wenn man Lernende immer "an der Hand nimmt", um auf die wichtigsten Konzepte und Prinzipien zu fokussieren. Ich stimme zu. Die Perspektive der fokussierten Verarbeitung ist so jedoch nicht gemeint. Bei Lernenden mit höherem Vorwissen z. B. kann man weitgehend darauf vertrauen, dass sie die wichtigen Aspekte fokussieren. Entsprechendes „didaktisches Gängel“ wäre abträglich (vgl. Expertise-Umkehr-Effekt; Kalyuga & Renkl, 2010). Zudem wird das Prinzip der „erwünschten Schwierigkeit“ (Bjork & Bjork, 2011) keineswegs in Abrede gestellt: Lernbedingungen, die es für die Lernenden zunächst „schwerer“ machen, erhöhen vielfach den Lernerfolg. So ist es meist besser, die Lernenden die Prinzipien hinter Beispiellösungen sich selbst erklären zu lassen (Vorgabe von Selbsterklärungsprompts) als sie ihnen zu erklären (Vorgabe instruktionaler Erklärung; Renkl, 2011). Die Perspektive der fokussierten Erklärung sollte nicht dahingehend missverstanden werden, als dass das Wichtige den Lernenden immer „auf dem Tablett serviert“ werden sollte. Zentral ist vielmehr, dass die Lernenden angehalten werden, sich eingehend mit dem Wichtigsten zu beschäftigen.

## Literatur

- Ainsworth, S. (2006). DeFT: A conceptual framework for considering learning with multiple representations. *Learning and Instruction, 16*, 183-198.
- Alfieri, L., Brooks, P. J., Aldrich, N. & Tenenbaum, H. (2011). Does discovery-based instruction enhance learning? *Journal of Educational Psychology, 103*, 1-18.
- Barab, S., Ingram-Goble, A., Gresalfi, M., Arici, A., Siyahhan, S., Dodge, T. & Hay, K. (2008). Conceptual play spaces and the quest Atlantis project. In G. Kanselaar, V. Jonker, P. A. Kirschner & F. J. Prins (Hrsg.), *Proceedings of the 8th International Conference of the Learning Sciences 2008* (Bd. 3, S. 190-192). Utrecht, NL: ICLS.
- Baumert, J., Kunter, M., Blum, W., Brunner, M., Voss, T., Jordan, A., Klusmann, U., Krauss, S., Neubrand, M., & Tsai, Y.-M. (2010). Teachers' mathematical knowledge, cognitive activation in the classroom, and student progress. *American Educational Research Journal, 47*, 133-180.
- Berthold, K., Eysink, T. H. & Renkl, A. (2009). Assisting self-explanation prompts are more effective than open prompts when learning with multiple representations. *Instructional Science, 37*, 345-363.
- Berthold, K. & Renkl, A. (2009). Instructional aids to support a conceptual understanding of multiple representations. *Journal of Educational Psychology, 101*, 70-87.
- Berthold, K. & Renkl, A. (2010). How to foster active processing of explanations in instructional communication. *Educational Psychology Review, 22*, 25-40.
- Bjork, E. L. & Bjork, R. A. (2011). Making things hard on yourself, but in a good way: Creating desirable difficulties to enhance learning. In M. A. Gernsbacher, R. W. Pew, L. M. Hough & J. R. Pomerantz (Hrsg.), *Psychology and the real world: Essays illustrating fundamental contributions to society* (S. 56-64). New York: Worth Publishers.

- Chi, M. T. H. (2009) Active-constructive-interactive: A conceptual framework for differentiating learning activities. *Topics in Cognitive Science*, 1, 73-105.
- Glogger, I., Schwonke, R., Holzäpfel, L., Nückles, M. & Renkl, A. (2011). *Learning strategies assessed by journal writing: Prediction of learning outcomes by quantity, quality, and combinations of learning strategies* (eingereichtes Manuskript).
- Greeno, J. G. (2006). Learning in activity. In R. K. Sawyer (Hrsg.), *Cambridge handbook of the learning sciences* (S. 79-96). New York, NY: Cambridge University Press.
- Hilbert, T. S., Renkl, A., Kessler, S. & Reiss, K. (2008). Learning to prove in geometry: Learning from heuristic examples and how it can be supported. *Learning & Instruction*, 18, 54-65.
- Jamieson-Noel, D., & Winne, P. (2003). Comparing self-reports to traces of studying behavior as representations of students' studying and achievement. *German Journal of Educational Psychology*, 17, 159-171.
- Kalyuga, S. & Renkl, A. (2010). Expertise reversal effect and its instructional implications. *Instructional Science*, 38, 209-215.
- Lave, J. (1996). Teaching, as learning, in practice. *Mind, Culture, and Activity*, 3, 149-164.
- Leuders, T. & Holzäpfel, L. (in Druck). Kognitive Aktivierung im Mathematikunterricht. *Unterrichtswissenschaft*, 39.
- Pauli, C. & Lipowsky, F. (2007). Mitmachen oder zuhören? Mündliche Schülerinnen- und Schülerbeteiligung im Mathematikunterricht. *Unterrichtswissenschaft*, 35, 101-124.
- Renkl, A. (1996). Lernen durch Erklären - oder besser doch durch Zuhören? *Zeitschrift für Entwicklungspsychologie und Pädagogische Psychologie*, 28, 148-168.
- Renkl, A. (2009). Wissenserwerb. In E. Wild & J. Möller (Hrsg.), *Pädagogische Psychologie* (S. 3-26). Berlin: Springer.
- Renkl, A. (2011). Instruction based on examples. In R. E. Mayer & P. A. Alexander (Hrsg.), *Handbook of research on learning and instruction* (S. 272-295). New York, NY: Routledge.
- Renkl, A. (in Druck). Aktives Lernen: Von sinnvollen und weniger sinnvollen theoretischen Perspektiven zu einem schillernden Konstrukt. *Unterrichtswissenschaft*, 39.
- Schmidt, H. G., De Volder, M. L., De Grave, W. S., Moust, J. H. C. & Patel, V. L. (1989). Explanatory models in the processing of science text: The role of prior knowledge activation through small-group discussion. *Journal of Educational Psychology*, 81, 610-619.
- Schukajlow, S. & Leiss, D. (2011). Selbstberichtete Strategienutzung und mathematische Modellierungskompetenz. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 32, 53-77.
- Schwartz, D. L. & Martin, T. (2004). Inventing to prepare for future learning: The hidden efficiency of encouraging original student production in statistics instruction. *Cognition and Instruction*, 22, 129-184.
- Schwonke, R., Berthold, K. & Renkl, A. (2009). How multiple external representations are used and how they can be made more useful. *Applied Cognitive Psychology*, 23, 1227-1243.