

Christoph ABLEITINGER, Essen

Komplexität von Übungsaufgaben im ersten Jahr des gymnasialen Lehramtsstudiums

Übungsaufgaben stellen in den ersten beiden Semestern eines Mathematikstudiums den entscheidenden Dreh- und Angelpunkt dar. Einerseits ist der entsprechende zeitliche Aufwand für die Studierenden sehr groß, andererseits haben Übungsaufgaben hohe Relevanz bei Prüfungen und Klausuren.

Und das ist auch durchaus wünschenswert, denn Aufgaben geben Gelegenheit zum authentischen Betreiben von Mathematik. Während die Studierenden in den Vorlesungen üblicherweise eine eher passive Rolle einnehmen, müssen sie bei der Bearbeitung von Haus- und Präsenzaufgaben in den Übungsgruppen selbst initiativ und kreativ werden.

Will man also Aussagen darüber machen, warum so viele Studierende Schwierigkeiten in ihrem ersten Studienjahr haben, lohnt es sich, einen analysierenden Blick auf die Übungsaufgaben zu richten.

1. Klassische Übungsaufgaben und ihre Lösungen

Übungsaufgaben aus Analysis aus Linearer Algebra haben meist ganz typische Merkmale: Sie sind prägnant formuliert und enthalten keine Redundanzen, sie verzichten auf Motivationstexte ebenso wie auf Grafiken.

Ein typisches Beispiel wäre etwa: Für welchen reellen Parameter a nimmt die Funktion $f(x, y) = x^2 - xy + a \log(1 + y^2)$ an der Stelle $(0,0)$ ein lokales Extremum an? Begründen Sie Ihre Antwort!

Je nach Dozent werden den Studierenden Musterlösungen zu den Aufgaben zur Verfügung gestellt. Auch diese Musterlösungen sind meist kurz und bündig. Sie kommen ohne Begleitkommentare und Erläuterungen aus und offenbaren nur selten den Weg, *wie* man auf die Lösung gekommen ist. Es ist demnach wenig verwunderlich, dass Erstsemester mit solchen Musterlösungen wenig anfangen können. Selbst wenn das bloße Nachvollziehen der Lösung gelingt, hat die Beschäftigung mit den Musterlösungen nur wenig Lerneffekt für künftige selbstständige Aufgabenbearbeitungen.

Im Rahmen des von der Telekom-Stiftung geförderten Projektes „Mathematik besser verstehen“ wurden aus diesem Grund zu einigen der Aufgaben ausführliche Musterlösungen verfasst, die folgenden Gesichtspunkten Rechnung tragen sollen:

- Die Problemstellung soll geklärt werden.
- Es sollen Lösungsideen entwickelt werden.

- Es dürfen Irrwege vorkommen und es sollen unterschiedliche Strategieoptionen in den Blick genommen werden.
- Entscheidende Punkte in der Lösung sollen hervorgehoben werden.
- Es sollen detaillierte Argumentationsschritte aufgeführt werden.

Ziel ist es, den Studierenden damit Vorbilder für authentisches, professionelles Mathematiktreiben zu liefern.

2. Wissenschaftliche Fragestellungen und Forschungsmethode

Beim Verfassen ausführlicher Musterlösungen ergeben sich ganz automatisch eine Reihe fachdidaktischer Fragestellungen:

- Welche Kompetenzen benötigt man zur Lösung klassischer Mathematikaufgaben des ersten Studienjahres?
- Gibt es typische Bearbeitungsphasen, die in unterschiedlichen Aufgabenlösungen immer wieder zu identifizieren sind?
- Kann man die zur Lösung benötigten Teilkompetenzen isoliert schulen?

Um diese Problemstellungen wissenschaftlichen Methoden zugänglich zu machen, wurde eine Sammlung an ausführlichen Musterlösungen zu Aufgaben aus dem Studienjahr 2009/10 zur Analyse ausgewählt.

In einer ersten Phase haben wir versucht, unterschiedliche Bearbeitungssequenzen hinsichtlich ihrer Intention und ihrer Funktion zu identifizieren. Diese Bearbeitungssequenzen wurden klassifiziert und zu sieben unterschiedlichen Bearbeitungsphasen zusammengefasst. Methodische Fragen diese Klassifikation betreffend können aufgrund des begrenzten Platzes hier leider nicht diskutiert werden.

Im folgenden Abschnitt wird ein Überblick über das vorläufige Phasenmodell gegeben, das in unserer weiteren Forschungsarbeit einem Interrater-Reliabilitätstests unterzogen werden soll.

3. Das Phasenmodell

P Problembewusstsein schaffen (Developing awareness): Diese Phase gliedert sich in zwei Subkategorien:

- a) Bevor eine Aufgabe sinnvoll bearbeitet werden kann, muss zunächst geklärt werden, welchem Themenfeld sie zuzuordnen ist und worin das eigentliche Problem in der Aufgabenstellung besteht (z.B. inwiefern die Aufgabe nicht trivial zu beantworten ist). Es wird dabei der Weg gebahnt, passende Handlungsspielräume zu öffnen.

- b) Zum Problembewusstsein soll aber auch gehören, dass man während bzw. am Ende des Aufgabenlösungsprozesses den springenden Punkt der Aufgabe erkennt und benennt oder rückblickend die Rolle der Aufgabe im Kontext des Themengebietes identifiziert.

K Klärung der Handlungsoptionen (Review of options for actions): In dieser Phase werden Handlungsoptionen gesichtet, die zur Aufgabenlösung beitragen könnten, ohne bereits die Detailausführung in Angriff zu nehmen. Es wird abgewogen, welche Art von Strategie, welche Theorie, welcher Satz, welche Definition, welcher Kalkül zum Einsatz kommen könnte. In der Folge wird die Entscheidung für eine der Optionen getroffen bzw. werden fehlgeschlagene Handlungsoptionen während des Lösungsprozesses verworfen und neue aufgenommen.

Diese Phase begleitet den gesamten Aufgabenlösungsprozess, ohne dass dabei der Problemzustand verändert wird. Die Veränderung des Problemzustandes wird allerdings schon angebahnt und durch die Entscheidung zugunsten einer der Handlungsoptionen beeinflusst bzw. sogar determiniert.

Z Einen Zugriff herstellen, die Aufgabe handhabbar machen (Gaining accessibility): Bei vielen Aufgaben muss sich der Aufgabenlöser – um die gewählte Handlungsoption durchzuführen – zuerst einen Ankerpunkt verschaffen, an dem er mit der Bearbeitung ansetzen kann. Man muss gewissermaßen die äußere Schale der Aufgabe aufbrechen und die Aufgabenstellung so repräsentieren, dass sie für die zur Verfügung stehenden Methoden zugänglich wird. Das kann manchmal durch einen Sichtweisenwechsel erfolgen, manchmal aber auch durch einen Übergang zu geeigneten Objekten bzw. zu einer geeigneten Darstellung der vorliegenden mathematischen Objekte. Diese Phase hat öffnenden Charakter, insofern sich danach meist neue Handlungsoptionen bieten (die vorher eventuell noch gar nicht sichtbar waren).

A Anpassung oder Prüfen der Passung (Adjustment): Zielt man auf die Verwendung eines bestimmten Werkzeuges (z.B. Satz, Methode, Kalkül) ab, so muss die Problemstellung an dieses Werkzeug angepasst werden, muss die vorliegende Situation eventuell modifiziert werden. Unter Umständen müssen Notationen angeglichen werden oder es muss erkannt werden, dass das Werkzeug modulo der Notationen schon zur vorliegenden Situation passt. Auch das Überprüfen von Voraussetzungen eines Satzes und das gezielte Umstrukturieren eines Ausdrucks, um ihn in eine gewünschte Form zu bringen, gehören in diese Kategorie.

Im Gegensatz zur Kategorie Z handelt es sich hierbei um fokussierende Tätigkeiten.

T Tricks, professionelles Know-How (Gimmicks): An manchen Stellen der Aufgabenbearbeitung hilft nur noch ein Trick, eine spezielle Repräsentation oder Umdeutung des Problems. Diese Tricks sind meist lokale „vom Himmel fallende“ Ideen, die sehr speziell auf eine bestimmte Situation passen und nur erfahrenen Aufgabenlösern geläufig sind. In manchen Fällen lassen sich diese Tricks allerdings auch durch das Anwenden heuristischer Strategien finden. Die Funktion von Tricks ist meist das Vorantreiben des Lösungsprozesses, wenn dieser ins Stocken geraten ist bzw. das elegante Abkürzen der Aufgabenlösung.

H Handwerk (Engineering): Damit ist das Ausführen von Verfahren und Techniken gemeint, die zur Routine geworden sind. Selbstverständlich ist es subjektiv unterschiedlich, welche Arbeitsphasen eine Person als Handwerk bezeichnen würde – eine Tätigkeit, die für einen Experten Routine ist, kann für einen Novizen noch eine große kognitive Herausforderung darstellen.

Legen wir das (normativ zu erwartende) Kompetenzniveau von Studienanfängern zugrunde, so können wir Tätigkeiten wie das Manipulieren von Termen, das Abarbeiten von Kalkülen oder das Anwenden von einfachen bekannten Resultaten als Handwerk bezeichnen.

B Begleitende, strukturierende Kommentare und Erläuterungen: Zwischen einzelnen Teilschritten der Aufgabenbearbeitung wird Resümee gezogen. Es wird über schon Erreichtes reflektiert und festgehalten, was noch zu zeigen ist. Durch begleitende Kommentare kann auch nochmal der entscheidende Punkt in der Aufgabenbearbeitung akzentuiert werden. Schließlich fällt auch das Beurteilen des Erfolgs von zuvor durchgeführten Handlungen in diese Kategorie.

Beispiele zu den einzelnen Phasen, eine Diskussion des Gültigkeitsbereichs bzw. der Grenzen des Modells sowie eine ausführliche Darstellung des Interrater-Tests zur Feststellung der Reliabilität des vorgestellten Analysewerkzeugs müssen wegen der knappen Kapazität an anderer Stelle nachgeliefert werden.

Literatur

- Anderson, J. R. (2007): Kognitive Psychologie. 6. Auflage, Springer Verlag, Berlin.
- Kaiser, H. (2005): Wirksames Wissen aufbauen. Ein integrierendes Modell des Lernens. h.e.p. Verlag, Bern.
- Renkl, A.; Hilbert, T.; Schworm, S. (2001): Example-based Learning in Heuristic Domains: A Cognitive Load Theory Account. In: Educ Psychol Rev (21). S. 67-78
- Wittmann, E. (1974): Grundfragen des Mathematikunterrichts. Vieweg Verlag, Braunschweig.