

Kathrin AKINWUNMI, Dortmund

Zum Verallgemeinern mathematischer Muster und zur propädeutischen Entwicklung von Variablenkonzepten in der Grundschule

1. Verallgemeinern mathematischer Muster – nicht nur ein Zugang zur Algebra

Das Verallgemeinern mathematischer Muster ist eine Leitidee für den Zugang zur Algebra (Mason et al. 2005) und die Einführung von Variablen in der Sekundarstufe. Die Tätigkeit, die Fischer et al. (2010, 2) als „aus vielen einzelnen Fällen ein allgemeines Muster oder einen allgemeinen Zusammenhang herleiten – das allen Gemeinsame erfassen“ beschreiben, stellt sich dabei als eine elementare menschliche Denkhandlung dar, die aber für das algebraische Denken eine wichtige Rolle spielt (ebd.). Variablen als *Unbestimmte* und als *Veränderliche* (nach Freudenthal 1973; 1983) dienen als Mittel des Verallgemeinerns. Es lässt sich dadurch eine Sinnstiftung für den Gebrauch von Variablen erzielen, da Variablen benötigt werden, um beispielsweise allgemein zu kommunizieren, argumentieren, explorieren oder Probleme zu lösen (Malle 1993).

Der Auffassung der Mathematik als die Wissenschaft von Mustern folgend, stellt sich das Verallgemeinern als grundlegende Tätigkeit jeglichen Mathematikunterrichts dar – auch bereits in der Grundschule. Entdecken, Beschreiben und Begründen von Mustern und Strukturen sind hier feste Bestandteile des Mathematikunterrichts und dabei müssen Muster und Strukturen von den Lernenden aktiv konstruiert, das heißt in mathematische Zeichen hineingedeutet werden (Steinbring 2005). Die Schülerinnen und Schüler stehen dabei vor der Anforderung, das Allgemeine im Besonderen zu sehen (ebd.).

Kommunizieren Kinder über Mathematik, so sprechen sie ebenso über Regelmäßigkeiten, Strukturen und Beziehungen; doch ohne die Kenntnis der algebraischen Sprache, ohne konventionelle Zeichen zur Verallgemeinerung, stehen sie vor der Schwierigkeit, etwas Allgemeines mitteilen zu wollen, ohne Zeichen wie Variablen dafür zu kennen. Sie sind dann gezwungen, in der Kommunikation selbst passende Zeichen zu finden, welche die mathematischen Strukturen und Beziehungen in ihrer Allgemeinheit repräsentieren und stoßen so in der Interaktion auf die Notwendigkeit des Verallgemeinerns.

In der Zusammenführung dieser beiden Perspektiven auf das Verallgemeinern ergeben sich folgende Forschungsfragen:

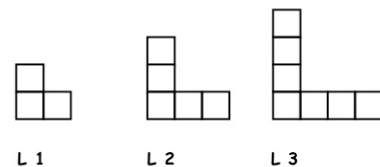
- Wie verallgemeinern Grundschul Kinder mathematische Muster und wie verwenden und deuten sie dabei Variablen?
- Welche Hilfsmittel nehmen die wichtige Rolle von Variablen ein?
- Lässt sich in den Verallgemeinerungen der Lernenden eine pro-pädeutische Entwicklung von Variablenkonzepten erkennen?

2. Einblick in die Ergebnisse einer Interviewstudie

Um Verallgemeinerungen mathematischer Muster im Rahmen eines Dis-sertationsprojekts zu untersuchen, wurden 30 klinische Interviews mit Viertklässlerinnen und Viertklässlern durchgeführt, denen Aufgaben zur Deutung und Beschreibung von mathematischen Mustern vorgelegt wur-den. Mit Hilfe des epistemologischen Dreiecks (Steinbring 2005) können die Verallgemeinerungen der Schülerinnen und Schüler aus begriffsbil-dungstheoretischer Perspektive in den Blick genommen werden.

Die Aufgabe der Beschreibung mathematischer Muster und Strukturen stellt sich in der Untersuchung als Moment heraus, in dem Kinder die Not-wendigkeit zur Verallgemeinerung verspüren. Dabei entsteht die Verwen-dung von Zeichen mit Variablencharakter aus der Motivation, eine mathe-matische Struktur allgemein und über ein Beispiel hinaus zu beschreiben.

Als der Schüler Lars für die nebenstehende Folge (Abb. 1) beschreiben möchte, wie er die jeweils benötigte Anzahl an Plättchen errechnen kann, fertigt er die folgende Zeichnung (Abb. 2) an und es entsteht die hier dargestellte



Interviewszene:

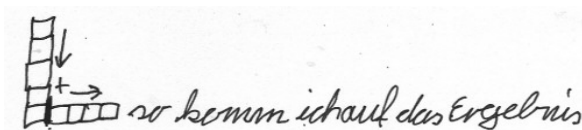


Abb. 1: Die Folge ‚L-Zahlen‘ des Aufgabenformats ‚Plättchenmuster‘

Abb. 2: Lars Beschreibung der Folge

- L.: Das sind ja jetzt fünf. Und das sind jetzt fünf. So und ähm und (zeichnet Pfeile an die Quadrate).
- I.: Mmh. Super. Jetzt musst du mir nochmal genauer erklären, wie du das genau meinst (zeigt auf die Pfeile auf dem Blatt).
- L.: Also das runter (fährt mit dem Stift die senkrechten Quadrate entlang) plus das (fährt mit dem Stift die waagerechten Quadrate entlang) rechne ich.
- I.: Ah, ok. Gut.
- L.: Und ähm, das hier (zeigt auf das Quadrat an der Ecke des L-Musters) soll noch zu dem runter gehören. Deswegen mach ich da ne etwas dickere Linie hin (zeichnet die Linie nach).

Lars nutzt in dieser Interviewszene eine Zeichnung des 4. Folgeglieds zur Beschreibung seiner Musterstrukturierung, welche er mit einem senkrechten und einem waagerechten Pfeil, sowie einem Pluszeichen versieht. Durch seine Erklärung der Pfeile „das runter plus das rechne ich“ zeigt er auf, dass diese die Summanden der Addition der beiden dargestellten Seiten repräsentieren sollen. Die beiden Summanden bezeichnet er mündlich mit den Wörtern ‚das runter‘ und ‚das‘, welche hier als *Wortvariablen* aufgefasst werden können. Sowohl diese, als auch die in der Zeichnung benutzten Pfeile verweisen als Variablen auf die sich verändernde Anzahl an Plättchen in den Teilstücken von Lars Musterstrukturierung. Sie ermöglichen es Lars, die Struktur der L-Zahlen über das aufgezeichnete Beispiel 5+4 hinaus zu beschreiben.

In der Situation der Versprachlichung ziehen Lernende spontan gewählte Zeichen aus anderen Kontexten hinzu, die als Wortvariable dienen,

wie hier bei Lars das Lokaladverb der Richtung ‚runter‘ und der deiktische Ausdruck ‚das‘. Diese Zeichen setzen die Kinder in eine neue Wechselbeziehung zu der allgemeinen zu beschreibenden Struktur (Abb. 3) und prägen dadurch den Variablenbegriff.

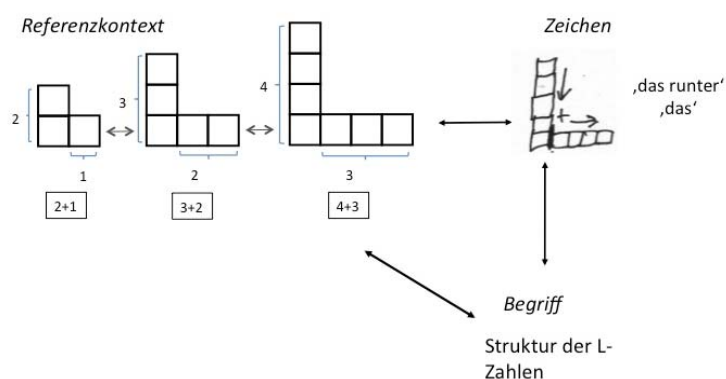


Abb. 3: Lars Beschreibung der Strukturierung

Auch wenn der Weg von diesen propädeutischen Variablenkonzepten zum konventionellen Variablengebrauch eine nicht zu unterschätzende Abstraktion darstellt, besitzen doch gerade die hier entstehenden unbewussten Begriffe eine bedeutsame Rolle in der Begriffsentwicklung (Wygotski 1986).

Über die unterschiedlichen Aufgabenformate hinweg können verschiedene Verallgemeinerungsweisen identifiziert werden (Abb. 4), die den Schülerinnen und Schülern als Mittel zur Verallgemeinerung dienen. Obwohl die oberen vier Verallgemeinerungsweisen Grenzen für das Treffen von allgemeingültigen Aussagen (eine Beschreibung gilt für alle Objekte des Musters / mit gleicher Struktur) aufweisen, verdeutlichen sie dennoch jeweils den allgemeinen Charakter des Musters, ermöglichen also ein ‚Allgemeinverstanden-Werden‘ in der Interaktion.

Verallgemeinerungsweise	Beschreibung der Kategorie	Plakative Beschreibung des Terms x^2
Angabe eines Beispiels	SuS geben ein Beispiel an und kennzeichnen dieses dabei explizit als solches.	„Das ist zum Beispiel drei mal drei.“
Aufzählung mehrerer Beispiele	SuS zählen mehrere Beispiele auf und verweisen ggf. auf einen Fortlauf.	„Das ist ein mal eins, zwei mal zwei, drei mal drei und so weiter.“
Quasi-Variablen	SuS verwenden konkrete Zahlen und verbinden diese mit sprachlich verallgemeinernden Elementen.	„Ich rechne immer drei mal drei.“
Bedingungssätze	SuS verwenden Bedingungssätze.	„Wenn da drei steht, dann rechne ich drei mal drei.“
Variablen	SuS verwenden Wörter oder Zeichen mit Variablencharakter.	„Man muss die Zahl mal die gleiche Zahl rechnen.“ oder „? • ?“

Abb. 4: Verallgemeinerungsweisen

Die hier beschriebenen Verallgemeinerungsweisen (und deren Mischformen) entstehen in der Interaktion bei der Beschäftigung mit Mustern und Strukturen und nehmen im Kontext des Verallgemeinerns die Rolle von Variablen ein. Sie ermöglichen es den Lernenden, mathematische Muster und Strukturen allgemein zu beschreiben und dienen gleichzeitig der propädeutischen Entwicklung der Variablen als Unbestimmte bzw. als Veränderliche.

Literatur

- Fischer, A., Hefendehl-Hebeker, L. & Prediger, S. (2010): Mehr als Umformen: Reichhaltige algebraische Denkhandlungen im Lernprozess sichtbar machen. In: *Praxis der Mathematik in der Schule*, 52 (33), 1-7.
- Freudenthal, H. (1973): *Mathematik als pädagogische Aufgabe. Band 1*. Stuttgart: Klett.
- Freudenthal, H. (1983): *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrecht: Reidel.
- Malle, G. (1993): *Didaktische Probleme der elementaren Algebra*. Braunschweig: Vieweg.
- Mason, J., Graham, A. & Johnston-Wilder, S. (2005): *Developing Thinking in Algebra*. London: Sage Publications.
- Steinbring, H. (2005): *The Construction of New Mathematical Knowledge in Classroom Interaction. An Epistemological Perspective*. New York: Springer.
- Wygotski, L.S. (1986⁶): *Denken und Sprechen*. Frankfurt am Main: Fischer.