

Henrike ALLMENDINGER, Universität Siegen

Elementarmathematik vom höheren Standpunkt – eine Begriffsanalyse in Abgrenzung zu Felix Klein

„Mehr Fachwissen kann also für Lehrerinnen und Lehrer nicht nur bedeuten, ihren Schülerinnen und Schülern curricular ‚voraus‘ zu sein. Fachwissen muss vielmehr ein tieferes Verständnis der Inhalte des mathematischen Schulcurriculums einschließen.“ (Krauss et al. 2008)

So wird in der COACTIV-Studie die Notwendigkeit einer „Schulmathematik vom höheren Standpunkt“ beschrieben. Nicht nur diese Studie beruft sich auf Felix Klein. Aber ist diese Assoziation wirklich zutreffend? Meinen wir wirklich Felix Kleins „höheren Standpunkt“, wenn wir von demselben sprechen? Eine genaue Auseinandersetzung mit Kleins Vorlesungen zeigt, dass sich seine Ausgangsperspektive, Intention und Schwerpunktsetzung wesentlich von dem unterscheiden, was heute vielfach unter dem Begriff „höherer Standpunkt“ verstanden wird. Ziel dieses Beitrags ist es, das breite Spektrum, in dem sich Auslegungen des Begriffs „höherer Standpunkt“ aufhalten können, darzustellen.

1. Felix Klein: „Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus“

Klein selbst beschreibt die Intention seiner Vorlesungen folgendermaßen:

„Ich strebe in meinen Elementarvorlesungen vor allem dahin, meinen Zuhörern Interesse und Verständnis für die Fragestellungen und den Sinn und Zweck der mathematischen Behandlung beizubringen.“ (Klein 1899)

Die Vorlesungsreihe richtet sich an Studenten, die bereits Grundkenntnisse in Algebra, Zahlentheorie und Funktionentheorie erworben haben. Es wird auf weite Teile des Mathematikstudiums zurückgegriffen. Klein gibt einen Überblick über den in der Schule zu unterrichtenden Stoff. Die Schulmathematik wird dann in die Hochschulmathematik eingebettet, und zudem werden die thematisierten mathematischen Inhalte sowohl inner- als auch außermathematisch vernetzt.

Klein legt in seinem mathematischen Forschen und Lehren großen Wert auf die Anschauung – so auch in dieser Vorlesung. Einen breiten Raum nimmt weiter die historisch-genetische Sicht ein. Durch die Auseinandersetzung mit der Entstehungsgeschichte von Begriffen erschließen sich Zusammenhänge. Insbesondere zeigt sich dadurch, wie sehr die Mathematik von induktivem Vorgehen und heuristischen Mitteln geprägt ist. Zudem werden die Studenten für Fragen zur Bedeutung von Mathematik sensibili-

siert, indem Klein philosophische Überlegungen in seine Vorlesung einbezieht. Kritische Bemerkungen über die bestehende Schulpraxis ergänzen das Angebot.

Insgesamt ist Kleins Standpunkt und somit die Zielsetzung der Vorlesung stark geprägt durch einen Blick auf Elementarmathematik aus der Perspektive der Hochschulmathematik.

2. Wilhelm Franz Meyer: „Repetitorium zur Elementarmathematik“

Der Zeitgenosse und Schüler Kleins, Wilhelm Franz Meyer, beschreibt die Idee seiner Vorlesung „Repetitorium zur Elementarmathematik“ so:

„[Grundgedanke der Vorlesung ist,] daß man bei häufiger Durcharbeitung des Elementarstoffes nicht nur eine wesentliche Ersparnis an Gedanken- und Rechnungsarbeit erzielt, sondern in enger Verbindung damit höhere Gesichtspunkte fast von selbst einführt.“ (Meyer 1899)

Es handelt sich um eine Vorlesung am Anfang des Grundstudiums. Somit kann nur auf die Schulmathematik Bezug genommen werden. Neben dem Sicherstellen von Rechenfertigkeiten, was insbesondere eine Grundlage für höhere Vorlesungen schaffen soll, geht es Meyer vor allem um einen „genaueren“ Blick auf elementare Themen und darum, den Studenten Respekt für Elementarmathematik und ihre Tiefe beizubringen.

Einer kurzen Wiederholung schulmathematischer Algorithmen folgt eine logische Analyse von Begriffen und Verfahren. Das schließt das Erkennen von Zusammenhängen und deren Rechtfertigung ein, genauso wie eine Reflexion der Ergebnisse. Dazu kommen Fragen zur Eindeutigkeit und Wohldefiniertheit von Begriffen. Verallgemeinerung bindet die Elementarmathematik dann direkt an die Hochschulmathematik an.

Zielsetzung seiner Vorlesung ist die Beschäftigung mit Elementarmathematik mit Übergängen zur hochschulmathematischen Perspektive. Im Gegensatz zu Klein, der die hochschulmathematische Perspektive schon voraussetzt, ist es Meyers erklärtes Ziel, diese in seinem Repetitorium erst zu entwickeln.

Da keine konkreten Ausarbeitungen des „Repetitorium zur Elementarmathematik“ vorliegen, lassen sich kaum Aussagen über die Umsetzung machen. Eine Vorlesung, die im beschriebenen Sinne gehalten wird, kann jedoch sicher nicht den Anspruch auf Vollständigkeit und Überblick erheben, wie es die „Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus“ von Klein macht. Die besprochenen Themen werden aber deutlich mehr in ihrer elementaren Tiefe betrachtet.

3. Urs Kirchgraber: „Fachwissenschaftliche Vertiefung mit pädagogischem Fokus“

„Generell gilt: Die Spezifizierung mit ‚pädagogischem Fokus‘ bedeutet: ‚Ist von Bedeutung für die zukünftige Tätigkeit als Gymnasiallehrperson im entsprechenden Fach‘.“ (Kirchgraber 2008)

Es handelt sich – nach dem Kleinschen Vorbild – um eine Vorlesung zu Beginn des Hauptstudiums. Die Grundkenntnisse des Grundstudiums werden vorausgesetzt. Anders als bei Klein ist der Inhalt stark eingegrenzt. Es geht also nicht um einen Überblick, sondern um eine gezielte Untersuchung ausgewählter Themen.

Ziel seiner Vorlesung ist zunächst ein reflektierter Umgang mit der Schulmathematik. Zudem sollen die Studenten lernen, Mathematik zu würdigen: „Um ein angemessenes Bild von Mathematik zu bekommen ist es nötig, über Mathematik zu reflektieren und über Mathematik als Ganzes nachzudenken.“ (Kirchgraber 2008) In seinen Vorlesungen will Kirchgraber zudem Verantwortung gegenüber anderen insbesondere den nicht in der Schule unterrichteten Fächern erzeugen.

Drei Merkmale sind entscheidend: Erstens wird eine Längsschnittkohärenz entwickelt. Die elementarmathematische und hochschulmathematische Ebene können sich gegenseitig unterstützen. Auf der einen Seite hat die Elementarmathematik Modellcharakter für die Hochschulmathematik, zum anderen hilft die Hochschulmathematik – so Kirchgraber – einer „vorwärts kompatiblen Betrachtungsweise“. Zweitens wird in den Vorlesungen das Elementarisieren und Exaktifizieren von Inhalten thematisiert. Beim Elementarisieren stützt sich Kirchgraber auf die These, dass jeder hochschulmathematische Inhalt, so voraussetzungsstark und komplex er auch sein mag, einen Kern enthält, der jedem verständlich gemacht werden kann. Umgekehrt wird in der Mathematik oft mit vorläufigen Vorstellungen gearbeitet, die erst präzisiert werden, wenn es ein fachliches Bedürfnis danach gibt. Diese Exaktifizierungsprozesse sollen bewusst durchlaufen werden. Drittens können durch das Analysieren von Beweisen Kernideen herausgearbeitet werden.

Zusammenfassend lassen sich zwei Perspektiven bei Kirchgraber erkennen. Einerseits blickt er, genau wie Klein, auf die Elementarmathematik aus hochschulmathematischer Perspektive. Umgekehrt betrachtet er Hochschulmathematik aus elementarmathematischer Perspektive. Auch wenn in Kirchgrabers Vorlesung eine Perspektiverweiterung deutlich erkennbar ist, hat die Hochschulmathematik wie bei Klein eine tragende Rolle. Das ist bei Meyer anders, der die Elementarmathematik ins Zentrum seiner Betrachtung stellt.

tungen rückt und erst Schritt für Schritt hochschulmathematische Überlegungen einfließen lässt.

4. Ausblick

Damit ist das „Feld des höheren Standpunkts“ aber noch nicht ganz abgesteckt. So wird zum Beispiel in der Siegener „Schulanalysis vom höheren Standpunkt“ aus dem Projekt MATHEMATIK NEU DENKEN eine weitere Akzentverschiebung deutlich:

„Ziel ist eine Standpunktverlagerung weg von der vertrauten Beherrschung von Kalkülen hin zu einer verstehensorientierten begrifflichen Durchdringung.“ (Beutelspacher, Danckwerts, Nickel 2010)

Hier spielt u.a. die Anschlussfähigkeit für die mathematikdidaktische Vertiefung eine tragende Rolle.

Einer deskriptiven Analyse verschiedener charakteristischer Vorlesungen soll daher für die weitere Arbeit eine normative Klärung der Idee des „höheren Standpunkts“ folgen, bei welcher der „verstehensorientierte Umgang mit Elementarmathematik“ eine zentrale Rolle spielen wird.

Literatur

Beutelspacher, Albrecht; Danckwerts, Rainer; Nickel, Gregor: Mathematik Neu Denken. Empfehlungen zur Neuorientierung der universitären Lehrerbildung im Fach Mathematik für das gymnasiale Lehramt, Deutsche Telekom Stiftung, Bonn 2010.

Kirchgraber, Urs: Zur Mathematiklehrpersonenausbildung fürs Gymnasium an der ETH Zürich. In: Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, 2008 (S. 143–159).

Klein, Felix: Aufgabe und Methode des mathematischen Unterrichts an den Universitäten. In: Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, 1899 (S. 126–138).

Klein, Felix: Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus, 3 Bde., Julius Springer, Berlin 1968.

Krauss, Stefan; Neubrand, Michael; Blum, Werner; Baumert, Jürgen; Brunner, Martin; Kunter, Mareike; Jordan, Alexander: Die Untersuchung des professionellen Wissens deutscher Mathematik-Lehrerinnen und -Lehrer im Rahmen der COACTIV-Studie. Journal für Mathematikdidaktik (JMD), 29(3/4), 2008 (S. 223-258).

Meyer, Wilhelm Franz: Zur Ökonomie des Denkens in der Elementarmathematik. In: Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, 1899 (S. 147–154).