

Andreas BAUER, Würzburg

Argumentieren mit multiplen und dynamischen Darstellungen

Argumentieren hat im Mathematikunterricht in der Vergangenheit an Bedeutung gewonnen und wurde in den KMK-Bildungsstandards als allgemeine mathematische Kompetenz besonders hervorgehoben. Dabei wird Argumentieren verstanden als „der im Unterricht stattfindende soziale Prozess, bestehend aus dem Anzeigen eines Begründungsbedarfs und dem Versuch, diesen Begründungsbedarf zu befriedigen“ (Schwarzkopf 2000, S. 240). Damit ist die Argumentation, wie sie im Mathematikunterricht stattfindet, von einer allgemeineren Sichtweise von Argumentation abzugrenzen: während für letztere die Existenz einer Kontroverse entscheidend ist (vgl. Klein 1980, S. 10), wird im Mathematikunterricht dem Schüler oder der Schülerin eine argumentative Begründung abverlangt, „obwohl die genannte Antwort korrekt und die Richtigkeit mitnichten strittig ist“ (Krummheuer & Fetzer 2005, S. 30). Der Begründungsbedarf in dieser Argumentation erschließt sich also nicht aus der Notwendigkeit einer rationalen Konsensfindung, sondern verfolgt das Ziel, eine „Einsicht in einen allgemeinen Sachverhalt zu vermitteln und diese zu sichern“ (Vollrath 1980, S. 30). Dies äußert sich schon dadurch, dass für Argumentationen in der Klasse häufig keine antagonistischen, sondern vielmehr kooperative Argumentationsweisen charakteristisch sind (vgl. Meyer 2007, S. 82).

Toulmins 1958 erstmals veröffentlichtes Argumentationsmodell (vgl. Toulmin 2003) hat sich in der Mathematikdidaktik in zahlreichen Studien als Werkzeug zur Analyse von Argumenten bewährt (vgl. Schwarzkopf 2000, Krummheuer & Fetzer 2005, Bezold 2009, Fetzer 2011). Demnach besteht ein Argument aus verschiedenen Elementen, welchen in der Argumentation jeweils unterschiedliche Funktionen oder Rollen innehaben. In der nachträglichen Analyse beobachteter Argumentationsprozesse werden die Aussagen der Argumentierenden diesen Rollen zugeordnet, die im Pro-

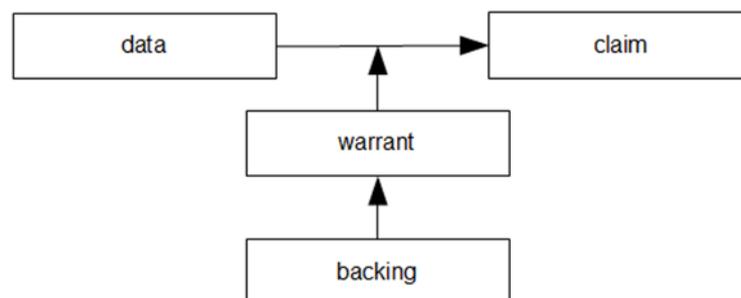


Abbildung 1: Grundstruktur von Argumenten nach Toulmin (2003, S. 92)

zess der Argumentation vorgebrachten Argumente werden also gemäß Toulmins Argumentationsmodell rekonstruiert. Argumente besitzen eine einheitliche Struktur: Eine Behauptung (claim) wird aufgestellt, basierend auf einem Datum (data). Dies ist zulässig wegen einer anwendbaren Schlussregel (warrant), deren Gültigkeit durch eine Stützung (backing) abgesichert ist (vgl. Toulmin 2003, S. 87ff). Eine beispielhafte Analyse eines Arguments ist in Abbildung 4 gezeigt.

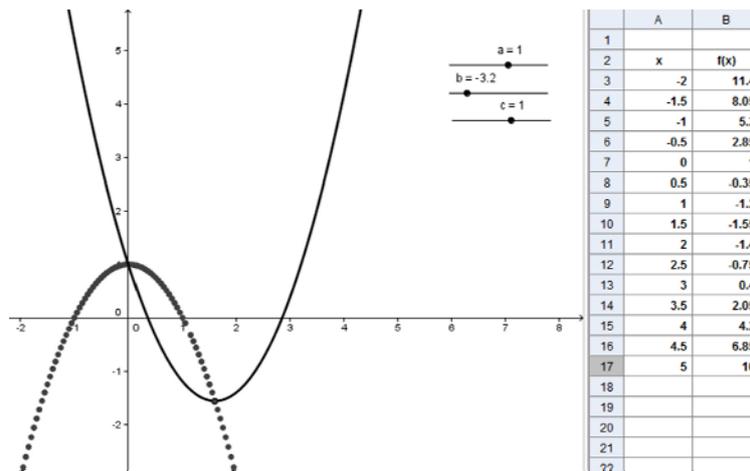


Abbildung 2: Beispiel einer multiplen, dynamischen Repräsentation

Wird über mathematische Objekte diskutiert, so entziehen sich diese als abstrakte, nicht-stoffliche Objekte dem direkten Zugriff menschlicher Wahrnehmung. Ein Zugang zu diesen Objekten ist nur über Repräsentationen möglich (vgl. Duval 2006, Kaput 1991), also sichtbare Informationsdarbietungen, welche bestimmte Eigenschaften eines mathematischen Objektes abbilden und somit greifbar machen. Diese bezeichnet man in Abgrenzung zu den mentalen, subjektiven Modellen mathematischer Objekte als *externe* Repräsentationen (vgl. Scaife & Rogers 1996, S. 188).

Der Computer hat als relativ neues Medium die Bandbreite externer Repräsentationen erheblich erweitert, insbesondere durch die Einführung dynamischer und dynamisch verbundener multipler Darstellungen (vgl. Abbildung 2). Multiple, externe Repräsentationen (MER) waren bereits Gegenstand zahlreicher Studien. Diese haben jedoch nicht nur positive Effekte nachweisen können (zusammengefasst bei Acevedo Nistal, Van Dooren, Clarebout, Elen, Verschaffel 2009), weshalb begonnen wurde, Gestaltungskriterien für die Verwendung von MERs zu entwerfen. Ainsworth (2006) identifiziert drei wesentliche Funktionen von MERs (Abbildung 3): eine ergänzende Rolle, in der zusätzliche Repräsentationen weitere Informationen und Handlungsmöglichkeiten bieten. Bei der eingrenzenden Rolle präzisieren Repräsentationen andere, um z. B. den Graph-als-Bild-Fehler

(vgl. Clement 1989, S. 8) zu vermeiden. Die dritte Rolle ermöglicht das Erzeugen eines tieferen Verständnisses für Repräsentationen, indem z. B. von bekannten Repräsentationen auf neue, unbekannte geschlossen und so das Wissen über Repräsentationen erweitert werden kann.



Abbildung 3: Funktionen von MER, vereinfacht nach Ainsworth (2006)

Vor allem die Verbindung und das Umschalten zwischen den einzelnen Darstellungen bereitet Lernenden wegen des notwendigen Wissens über Repräsentationen große Schwierigkeiten (vgl. van der Meij & de Jong 2006, S. 200). Die dynamische Verbindung dieser Repräsentationen mit Hilfe des Rechners verspricht jedoch eine Vereinfachung des Verständnisses durch eine automatische Übersetzung zwischen den Teilrepräsentationen der MER (vgl. Scaife & Rogers 1996, Kaput 1989). Besonders die Handlungen, die Lernende auf solchen dynamisch verbundenen Repräsentationen ausführen können, wie z. B. die Variation eines Graphen mit Hilfe von Schiebereglern (s. Abbildung 2), machen durch die auftretenden Invarianten die Verbindung zwischen den dargestellten Repräsentationen sichtbar und erlauben damit einen Blick auf die Struktur des zugrundeliegenden mathematischen Objektes. Eine solche Lernumgebung ist daher mehr als nur die Summe ihrer Teile (vgl. Kaput 1989, S. 179f).

Multiple dynamische Repräsentationen (MDER) können Lernende beim Argumentieren unterstützen, indem sie neue Daten anbieten, zusätzliche Schlussregeln verfügbar machen oder als Stützung fungieren. In Abbildung 4 ist eine beispielhafte Analyse eines Argumentes zu sehen.

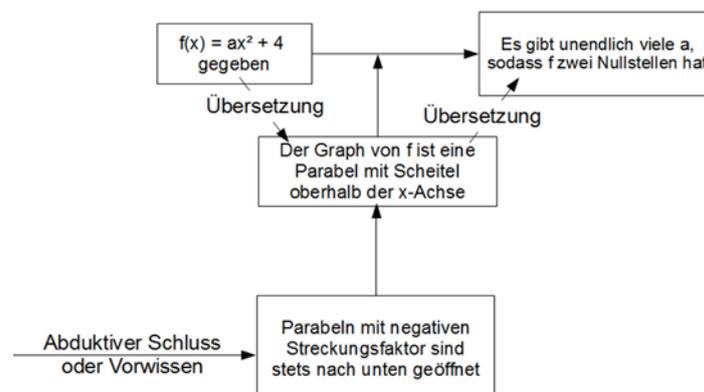


Abbildung 4: Beispielhafte Analyse eines Argumentes mit MDER

Die Schlussregel zur Behauptung ist dabei nur anwendbar, wenn zuvor ein Repräsentationswechsel von der gegebenen Gleichung zum Graphen der Funktion vorgenommen wird. Die Anwendbarkeit dieser Schlussregel ist durch eine Stützung abgesichert, welche entweder bereits als Vorwissen vorhanden war, oder z. B. aus einem dynamischen Applet abduktiv geschlossen wurde.

In meiner Dissertation werden im Rahmen einer empirischen Studie die Argumente Lernender anhand des Toulmin'schen Argumentationsmodells analysiert und insbesondere die Rolle der Multiplizität und Dynamik von Repräsentationen in den Argumenten beleuchtet.

Literatur

- Acevedo Nistal, A., Van Dooren, W., Clarebout, G., Elen, J. & Verschaffel, L. (2009): Conceptualising, investigating and stimulating representational flexibility in mathematical problem solving and learning: a critical review. In: *ZDM Mathematics Education* 41, S. 627–636.
- Clement, J. (1989). The concept of variation and misconceptions in cartesian graphing. *Focus on Learning Problems in Mathematics* 11 (1-2), 77–87.
- Fetzer, M. (2011). Wie argumentieren Grundschul Kinder im Mathematikunterricht? Eine argumentationstheoretische Perspektive. *Journal für Mathematik-Didaktik* 32, 27–51.
- Kaput, J. J. (1989). Linking Representations in the Symbol Systems of Algebra. In: Wagner, S. & Kieran, C. (Hrsg.), *Research issues in the learning and teaching of algebra* (S. 167–194). [Hillsdale, N.J.], Reston, Va: L. Erlbaum Associates; National Council of Teachers of Mathematics.
- Kaput, J. J. (1991). Notations and representations as mediators of constructive processes. In: von Glasersfeld, E. (Hrsg.), *Radical constructivism in mathematics education* (S. 53–74). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Krummheuer, G. & Fetzer, M. (2005): *Der Alltag im Mathematikunterricht*. München: Elsevier.
- van der Meij, J. & de Jong, T. (2006): Supporting students learning with multiple representations in a dynamic simulation-based learning environment. In: *Learning and instruction* 16 (3), S. 199–212.
- Meyer, M. (2007). *Entdecken und Begründen im Mathematikunterricht. Von der Abduktion zum Argument*. Hildesheim: Franzbecker.
- Scaife, M. & Rogers, Y. (1996): External cognition: how do graphical representations work? In: *International Journal for Human-Computer Studies* 45, S. 185–213.
- Schwarzkopf, R. (2000). *Argumentationsprozesse im Mathematikunterricht: Theoretische Grundlagen und Fallstudien*. Hildesheim [u.a.]: Franzbecker.
- Toulmin, S. (2003): *The Uses of Argument*. Updated edn. Cambridge: Cambridge University Press.
- Vollrath, H.-J. (1980): Eine Thematisierung des Argumentierens in der Hauptschule. In: *Journal für Mathematikdidaktik* 1, S. 28–41.