Stephan BERENDONK, Köln

Über eine Unterrichtseinheit zum Eulerschen Polyedersatz

Im folgenden Beitrag wird eine Unterrichtseinheit zum Eulerschen Polyedersatz für die Mittelstufe an niederländischen Gymnasien vorgestellt. Die Unterrichtseinheit ist in drei Teile gegliedert. Jeder Teil behandelt einen Erfahrungsbereich, in dem der Eulersche Polyedersatz entdeckt werden kann. Ein beliebter Beweis des Satzes geht auf von Staudt (1847) zurück. Die Idee dieses Beweises kommt in den drei Erfahrungsbereichen auf unterschiedliche Weise zum Vorschein und zwar durch Fragen und Betrachtungen, die an den jeweiligen Kontext gebunden sind.

1. Ecken, Kanten und Flächen

Den ersten Erfahrungsbereich bilden Papier- und Plastikpolyeder. Ist ein solches mathematisches Polyeder homöomorph zur Kugel, so gilt die folgende Formel: *Ecken – Kanten + Flächen = 2*. Die entscheidende Idee im von Staudtschen Beweis dieses Satzes ist es, zwischen zwei Arten von Kanten zu unterscheiden. Dies gelingt ihm, indem er einen maximalen Baum im Graphen des Polyeders betrachtet. Es gibt nun die Kanten, die auf dem Baum liegen und die übrigen Kanten. Erstere sind den Ecken zugeordnet; letztere den Flächen. Doch, woher kommt der maximale Baum, möchte man fragen.

Einen Zugang zu der Beweisidee liefert die Betrachtung von Polyedermustern, da diese im Gegensatz zum Polyeder von Natur aus zwei unterschiedliche Arten von Kanten besitzen, solche die auf dem Rand und solche die im Inneren liegen. Es liegt nahe, beim Bau eines Polyeders aus einem Muster zu fragen, entlang wie vieler Kanten man falten muss und wie viele Kantenpaare man verkleben muss. Dies führt zu der Beobachtung:

Ecken = geklebte Kanten + 1

Flächen = gefaltete Kanten + 1

Die geklebten Kanten bilden schließlich den maximalen Baum, mit dem der von Staudtsche Beweis beginnt.

2. Berge, Pässe und Täler

Den zweiten Erfahrungsbereich bilden Gebirgslandschaften auf Inseln. Ordnet man jedem Punkt auf einer solchen Insel seine Höhe über dem Meeresspiegel zu, so erhält man eine Höhenfunktion. Diese besitzt im allgemeinen nur isolierte Extrempunkte. Die lokalen Maxima einer solchen Höhenfunktion nennen wir *Berge*, die lokalen Minima *Täler* und die stabilen Sattelpunkte *Pässe*. Es gilt dann die folgende von James Clerk Maxwell (1870) gefundene Beziehung: *Berge – Pässe + Täler = 1*.

Die entscheidende Idee in Maxwells Beweis ist wiederum die Unterscheidung zweier Arten von Pässen. Dies erreicht er, indem er den Meeresspiegel und den Grundwasserspiegel gleichermaßen steigen lässt und schaut was passiert, wenn das Wasser die Höhe eines Passes erreicht. Das Wasser nähert sich dabei dem Pass von zwei Seiten. Es gibt nun zwei Möglichkeiten: Entweder gehört das Wasser auf beiden Seiten zu einem Gewässer oder es gehört zu zwei verschiedenen Gewässern. Im ersten Fall nennen wir den Pass eine *Landenge*, im zweiten Fall eine *Meerenge*. Es gilt schließlich die folgende Beziehung:

Berge = Landengen + 1

Täler = Meerengen

Bevor der Beweis mit den SchülerInnen thematisiert wird, werden topographische Karten von Inseln mit eingezeichneten Höhenlinien betrachtet. Die Pässe findet man darin als Doppelpunkte der Höhenlinien wieder. Die Überlegung das Wasser steigen zu lassen, liegt hiernach nicht mehr fern.

3. Kreuze, Züge und Gebiete

Den dritten Erfahrungsbereich bildet das Spiel „Brussels sprouts“ (Rosenkohl) von John H. Conway. Dies ist ein Spiel für zwei Personen, für das man nur einen Stift und ein Zeichenblatt benötigt. Zu Beginn des Spiels befindet sich eine beliebige Anzahl von Kreuzen auf dem Zeichenblatt. Jedes Kreuz besitzt 4 freie Arme. Nun ziehen die Spieler abwechselnd. Ein Zug besteht darin zwei freie Arme durch eine Kurve zu verbinden und irgendwo entlang der Kurve einen Strich zu setzen, sodass auf beiden Seiten der Kurve wieder ein freier Arm entsteht. Die folgende Abbildung zeigt die ersten beiden Züge eines möglichen Spielverlaufs für den Fall, dass mit zwei Kreuzen begonnen wurde:

Die Kurven dürfen einander jedoch nicht schneiden. Der erste Zug im obigen Spielverlauf hat ein Gebiet abgetrennt, daher kann man einen freien Arm innerhalb dieses Gebiets nun nicht mehr mit einem freien Arm außerhalb des Gebiets verbinden. Der Spieler, der zuerst keinen Zug mehr durchführen kann, hat verloren.

Der Clou des Spiels ist, dass ein Spiel mit *n* Kreuzen zu Beginn stets nach genau *5n-2* Zügen endet, sodass der Gewinner schon *feststeht*, sobald der beginnende Spieler feststeht.

Zunächst stellt sich die Frage, warum das Spiel überhaupt endet, schließlich bleibt die Anzahl der freien Arme während des Spiels konstant. Beim Spielen macht man jedoch die Erfahrung, dass die Zugmöglichkeiten immer weniger werden. Die Frage, ob dies bei jedem Zug der Fall ist, führt wieder zu der entscheidenden Unterscheidung zwischen zwei Arten von Zügen: denen, die ein Gebiet abtrennen und denen, die zwei Komponenten miteinander verbinden. Die Ersten reduzieren die Zugmöglichkeiten, die Zweiten nicht. Am Ende des Spiels gilt:

Kreuze = verbindende Züge + 1

Gebiete = trennende Züge + 1

Dabei ist mit „Kreuze“ die Anzahl der Kreuze zu Beginn und mit „Gebiete“ die Anzahl der Gebiete am Ende des Spiels gemeint. Da außerdem am Ende des Spiels in jedes Gebiet genau ein freier Arm weist, die freien Arme während des Spiels konstant bleiben und jedes Kreuz vier freie Arme besitzt, gilt ferner: *Gebiete = 4 Kreuze*. Setzt man dies in die zweite der beiden obigen Gleichungen ein und addiert diese, so erhält man die gesuchte Formel für die Anzahl der Züge.

In David S. Richesons Buch „Euler’s Gem“ (2008) wird das Spiel Brussels sprouts als Anwendung des Eulerschen Polyedersatzes präsentiert. Im Gegensatz dazu wird in dieser Unterrichtseinheit das Spiel als ein Kontext präsentiert, indem durch Fragen, die das Spiel aufwirft, der Eulersche Polyedersatz und der von Staudtsche Beweis entdeckt werden können.

Aufbau der Unterrichtseinheit

Alle drei Teile der Unterrichtseinheit beginnen mit einer phänomenologischen Phase. Die Untersuchungsgegenstände sind jeweils konkrete physikalische Gegenstände: Plastikpolyeder, Salzteiginseln und auf Papier gezeichnete Spielverläufe. Typische Handlungen sind zählen, spielen und buchhalten. Dabei werden Eigenschaften einzelner Objekte festgestellt. Mit Hilfe von Induktion im Sinne von George Pólya (1954) wird schließlich ein Gesetz aufgestellt, d.h. eine Eigenschaft wird einer ganzen Klasse von Objekten zugeschrieben.

Darauf folgt jeweils eine abstraktere Phase, in der die soeben beobachteten Eigenschaften der Objekte zum Untersuchungsgegenstand erhoben werden. Es geht nun um das Suchen und Ordnen von logischen Zusammenhängen zwischen diesen Eigenschaften. Es ist die Phase des Erklärens oder des Beweisens der Gesetze.

In einer letzten Phase werden dann schließlich die Beweise selbst zum Untersuchungsgegenstand. Zum einen werden die drei Beweise des Eulerschen Polyedersatzes aus den unterschiedlichen Erfahrungsbereichen miteinander verglichen und die Analogien zwischen ihnen herausgearbeitet. Zum anderen werden sie innerhalb ihres Erfahrungsbereichs als Werkzeug eingesetzt, um neue, d.h. noch nicht induktiv erhaltene, Gesetze über die ursprünglichen Objekte zu finden. Im Erfahrungsbereich Inseln wird gefragt, wie sich die Formel für die Berge, Pässe und Täler verändert, wenn man anstatt einer Insel einen ganzen Planeten betrachtet. Im Erfahrungsbereich Brussels sprouts wird gefragt, wie sich die Formel für die Anzahl der Züge verändert, wenn man die Kreuze durch Dreizacks ersetzt. In beiden Fällen soll untersucht werden, an welcher Stelle der Beweis anzupassen ist.

Zielsetzungen der Unterrichtseinheit

Wenn SchülerInnen nur ein geringes Bedürfnis nach Beweisen von Sätzen aufweisen, so mag das daran liegen, dass sie die Sätze empirisch überprüfen (vgl. Struve, 1990) und den Beweis nicht zur Wissensabsicherung benötigen. Die SchülerInnen sollen daher in der Unterrichtseinheit erfahren, dass Beweise nicht nur zur Erklärung eines Sachverhalts dienen können, sondern dass sie auch beim Suchen eines neuen Gesetzes eingesetzt werden können und sich dabei verändern.

Vor allem aber sollen die SchülerInnen erleben, wie durch Abstraktion, in unserem Fall durch das Erkennen der gemeinsamen kombinatorischen Struktur, verschiedene Erfahrungsbereiche miteinander vernetzt werden können.

Die mit der Unterrichtseinheit verfolgten Ziele gehen also über die Vermittlung der topologischen Inhalte hinaus.

Literatur

Maxwell, J. C. (1870). On Hills and Dales. The London, Edinburgh and Dublin Philosophical Magazine and J. Science, 40, 421 - 425.

Pólya, G. (1954). Induction and analogy in mathematics. Vol.1 of Mathematics an plausible reasoning. Princeton, NJ: Princeton University Press.

Richeson, D.S. (2008). Euler’s gem, the polyhedron formula and the birth of topology. Princeton, NJ: Princeton University Press.

Struve, H. (1990). Grundlagen einer Geometriedidaktik, Bd. 17 der Lehrbücher und Monographien zur Didaktik der Mathematik. Mannhein et al.

von Staudt, K.G.C. (1847). Geometrie der Lage. Nürnberg: Bauer und Raspe.