

Tatjana BERLIN, Essen

Unterstützung der algebraischen Denkentwicklung

Diesem Beitrag liegt ein Projekt zugrunde, welches einen Einstieg in die elementare Algebra untersucht und analysiert. Traditionell erfolgt dieser Einstieg in der Klasse 7. Die Formelsprache wird dabei relativ unvermittelt in Gebrauch genommen und vorwiegend auf der syntaktischen Ebene trainiert. Dies bedeutet, dass den Schülerinnen und Schülern ein sprunghafter Entwicklungsschritt zugemutet wird, an dem viele scheitern. Sie erleben das formale Manipulieren mit Zeichen als willkürlich und können den Sinn und die Bedeutung des mathematischen Geschehens nicht nachvollziehen. All dies gibt Anlass zu der Frage, ob es den natürlichen Lernbedingungen der Lernenden nicht entgegen käme, der Einführung der algebraischen Symbolsprache in der Klasse 7 eine propädeutische Phase in der Klasse 5 voranzustellen.

In einer binationalen empirischen Studie (Essen / St. Petersburg) untersuchte ich, wie Schülerinnen und Schüler der Klasse 5 in der Beschäftigung mit geometrischen und arithmetischen Mustern Strukturen erkennen, beschreiben, verallgemeinern und sich dabei Buchstabenvariable als symbolisches Darstellungsmittel zu eigen machen. Als Instrument der Datenerhebung dienten halbstandardisierte Interviews, die mit Methoden der interpretativen Unterrichtsforschung analysiert wurden.

1. Anbahnung algebraischen Denkens

Unter algebraischem Denken wird im Folgenden den Inbegriff des verständigen und beweglichen Umgangs mit der Symbolsprache der elementaren Algebra verstanden. Dazu gehören insbesondere die folgenden Fähigkeiten (Berlin u.a., 2009):

- in arithmetischen Zusammenhängen Strukturen und Formen erkennen,
- diese begrifflich und symbolisch allgemein beschreiben
- und schließlich symbolische Ausdrücke regelgeleitet umformen, die Ergebnisse sachgerecht interpretieren und aus ihnen neue Informationen ablesen.

Geometrische Musterfolgen eignen sich, um erste Gehversuche mit algebraischen Sichtweisen anzubahnen. Dies geschieht zum Beispiel, indem Beziehungen zwischen der Anzahl aller oder bestimmter Figurenteile und der Bildnummer hergestellt werden. Die in der Studie erhobenen Daten lassen erkennen, dass Kinder der Jahrgangsstufe 5 solche Situationen sehr unterschiedlich strukturieren und auf verschiedenen Ebenen der algebraischen

unterschiedlichen Strukturierungen, denen verschiedene Formel­ausdrücke entsprechen.

In den unterschiedlichen Herangehensweisen der Kinder lassen sich zwei verschiedene Grundtypen des gedanklichen Zurechtlegens erkennen. Zum einen wird das Strukturmuster in Form und Zusammenbau einer jeden Figur der Figurenfolge in Betracht gezogen, indem Kreise in bestimmten Positionen zu größeren Konfigurationen zusammengefasst werden (so bei Verena, Abb. 1). Zum anderen wird ein Veränderungsmuster in den Fokus genommen, welches sich bei dem Übergang von einer Figur der Figurenfolge zur nächsten zeigt. Dabei wird die Dynamik der Veränderungen untersucht (so bei Nikita, Abb. 2).

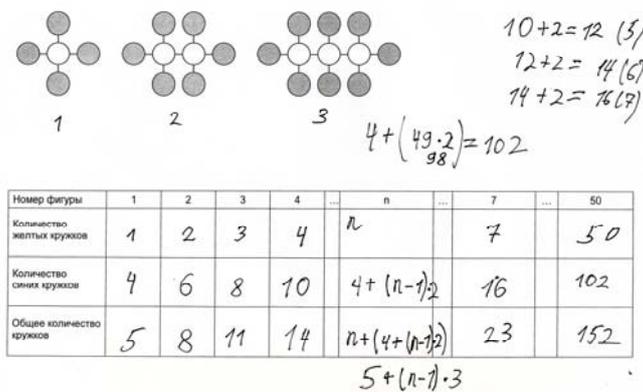


Abb. 2: Nikitas Bearbeitung

3. Stufen der algebraischen Den­kentwicklung

Die Probanden kommen im Lösungsprozess unterschiedlich weit. Dabei lassen sich verschiedene Stufen beobachten.

- **Vorbewusste Auseinandersetzung mit dem Material:**

Es findet eine intuitive Annäherung an eine Methode des Strukturierens bzw. Abzählens statt, welche dem Handelnden noch unbewusst bleibt, dem Betrachter jedoch durch Gestik, Mimik und Zeigetechnik des Kindes sichtbar wird. Wenn diese Annäherung nicht zu einer Bewusstheit der Vorgehensweisen und Beobachtungen gelangt, stagniert der Arbeitsprozess nach der Betrachtung der ersten konkreten Figuren.

- **Entwickeln einer bewussten Perspektive, Beobachten von Mustern:**

Das Kind erkennt, dass seine Methode des strukturierten Zählens ihm die Bearbeitung der Aufgabe erleichtert und setzt sie im weiteren Verlauf bewusst ein. Die begleitenden Beschreibungen bleiben jedoch auf dieser Stufe weitgehend vorbegrifflich und auf die Verwendung der eigenen kindlichen Sprache und Zeigetechnik begrenzt.

– *Erkennen von Zusammenhängen, Durchschauen von Mustern:*

Es wird erkannt, warum beobachtete Gesetzmäßigkeiten gelten und angewandte Strategien funktionieren. Ob das Kind ein Strukturmuster oder ein Veränderungsmuster erkennt, hängt von seiner statischen oder dynamischen Deutung der Situation ab. Auf der Beschreibungsebene werden strukturelle Einsichten thematisiert. Diese können exemplarisch, begrifflich oder formal-symbolisch artikuliert werden. Bleibt ein Kind jedoch auf der vorbegrifflichen Stufe des Beschreibens und gelangt nicht zur Verwendung von Fachbegriffen oder selbst geschaffenen gleichwertigen Ausdrucksweisen, kann es den Schritt zur symbolischen Darstellung nicht schaffen, weil die erforderlichen Konzepte fehlen.

4. Fazit

Es zeigt sich, dass die Entwicklung des algebraischen Denkens als progressive Bewusstwerdung des Handelns und Denkens mit einer begleitenden Versprachlichung und einer schrittweise erfolgenden Lösung vom Gegenstand betrachtet werden kann. Vor dem Hintergrund der empirischen Befunde der Studie lässt sich behaupten, dass die ersten Begegnungen mit algebraischer Formelsprache schon in die früheren Schuljahre verlagert werden können. Es sollten Lernumgebungen (vgl. Fischer u.a., 2010) im Unterricht angeboten werden, die einerseits individuelle Wege bei der Konstruktion des neuen Wissens, andererseits eine Bereicherung für die Unterrichtsteilnehmer auf der intersubjektiven Ebene durch den Austausch von verschiedenen Lösungswegen und Darstellungen ermöglichen. Dies kann dadurch geschehen, dass Muster und Strukturen thematisiert werden. Die Lehrkräfte müssen der Anforderung gerecht werden, den jeweiligen Stand der Denkentwicklung ihrer Schülerinnen und Schüler zu diagnostizieren und den Übergang zur nächsten Stufe anzuregen.

Literaturverzeichnis

- Berlin, T. / Fischer, A. / Hefendehl-Hebeker, L. / Melzig, D. (2009). Vom Rechnen zum Rechenschema - zum Aufbau einer algebraischen Perspektive im Arithmetikunterricht. In: Fritz, A. / Schmidt, S. (Hrsg.): Fördernder Mathematikunterricht in der Sek. I. Rechenschwierigkeiten erkennen und überwinden. Weinheim: Beltz, S. 270 – 292.
- Berlin, T. / Hefendehl-Hebeker, L. (2011). Stufen der algebraischen Denkentwicklung. In: MU Heft 2 (im Druck).
- Fischer, A. / Hefendehl-Hebeker, L. / Prediger, S. (2010). Mehr als Umformen: Reichhaltige algebraische Denkhandlungen im Lernprozess sichtbar machen. In: PM 52 (33); S. 1 – 7.