

Bianca BEUTLER, Braunschweig

## **Vorschulkinder integrieren Mengen- und Zahlenwissen beim Vergleichen und Verändern von Punktmustern**

Arithmetische und geometrische Fähigkeiten werden in der Mathematik der Grundschule klassisch als zwei getrennte Bereiche behandelt. In der jüngeren Mathematikdidaktik lässt sich jedoch eine Verschmelzung beider Bereiche beobachten. So wird in den Bildungsstandards der Grundschule zumindest mit der inhaltsbezogenen Kompetenz „Muster und Strukturen“ eine übergreifende Kompetenz formuliert. Bei welchen mathematischen Fähigkeiten sind solch übergreifende Kompetenzen überhaupt entwicklungspsychologisch begründbar? Lassen sich diese auch empirisch nachweisen?

### **1. Theoretische Zusammenhänge zwischen der Zahlbegriffsentwicklung und geometrischen Fähigkeiten**

Bereits Säuglinge besitzen die Fähigkeit zur Mengendiskrimination. Bei sehr kleinen Mengen ist diese Unterscheidung exakt, bei größeren Mengen ist sie nur ab gewissen numerischen Distanzen möglich (z. B. Wynn 1995, Feigenson, Carey & Spelke 2002). Ob diese Fähigkeiten auf ein mentales Konzept von Anzahligkeit beruhen, ist umstritten. Sicher ist, dass Kinder auch auf die Fähigkeit zur Wahrnehmung räumlicher Gegebenheiten und die Kenntnis physikalischer Gesetzmäßigkeiten zurückgreifen, um Gegenstände sowie kontinuierliche und diskrete Mengen zu beurteilen. Insbesondere berücksichtigen die Kinder räumliche Eigenschaften wie Ausdehnung, Dichte, Fläche oder Volumen und auch zeitliche Eigenschaften wie die Dauer. Resnick (1989) konkretisiert dieses frühe Mengenwissen durch die Annahme dreier *räumlich-analoger Schemata*, dem *Vergleichsschema*, dem *Vermehrungs-/Verminderungsschema* und dem *Teil-Ganzes-Schema*.

Dem gegenüber steht das kulturell erworbene sprachliche Zahlenwissen, d. h. die Kenntnis von Zahlwörtern und Zahlwortreihe sowie die Beherrschung der Zählprinzipien. Resnick bezeichnet dieses als *digitalsequenzielle Schemata*; sie stehen zunächst in keinem Zusammenhang zu räumlichen Vorstellungen. Im Laufe der Zahlbegriffsentwicklung gilt es nun, das Zahlenwissen und das frühe Mengenwissen zu integrieren, sodass schlussendlich ein umfassender Zahlbegriff entwickelt wird. Laut dem Neurowissenschaftler Dehaene (1992) besteht dieser aus der Vernetzung dreier verschiedener mentaler Zahlenrepräsentationen: die räumliche Zahlenvorstellung (*analog magnitude representations*), die durch von Aster (2005) auch als frühes Mengenwissen interpretiert wird und die Entwicklung eines mentalen Zahlenstrahls beinhaltet, das sprachliche Zahlenwissen

(*auditory verbal word frame*) und die Repräsentation der Ziffern (*visual arabic number form*). Somit lässt sich herleiten, dass all diejenigen Teilbereiche der Zahlbegriffsentwicklung, die direkt auf das frühe Mengenwissen aufbauen, mit räumlichem Wissen in Verbindung stehen.

Aus verschiedenen Modellen zur Zahlbegriffsentwicklung, z. B. von Krajewski und Schneider (2006), sind für die vorliegende Studie drei arithmetische Prinzipien isoliert worden, welche in direktem Bezug zu räumlich-analogen Schemata stehen und von besonderer Relevanz für die mathematische Entwicklung bei Vorschulkindern sind: das Prinzip des Um-eins-mehr/weniger-Werdens, der Kardinalzahlaspekt und die Teil-Ganzes-Beziehungen.

## **2. Welche Rolle spielen arithmetische Prinzipien, wenn Vorschulkin-der geometrische Aufgaben bearbeiten?**

Um die theoretisch entwickelten arithmetischen Prinzipien auf ihre empirische Existenz hin zu überprüfen und sodann Hypothesen über mögliche Zusammenhänge zu geometrischen Lösungsstrategien zu bilden, wurde ein Aufgabenkompendium für Vorschulkinder erstellt, welches diverse geometrische Inhalte umfasst und gleichzeitig das Nachdenken über arithmetische Zusammenhänge anregen kann. Weiterhin dienen alle Untersuchungen der Evaluation eines bestehenden Frühförderprogramms, welches u. a. Zahl- und Zahlraumvorstellungen über geometrische Handlungserfahrungen initiiert. In einem Vorher-Nachher-Vergleich wird eine Veränderung von Lösungsstrategien und Fähigkeiten beobachtet und es besteht die Möglichkeit, Rückschlüsse auf Entwicklungszusammenhänge zu ziehen.

Für die hier zu referierende Vorstudie zur Konzept- und Aufgabenerprobung ist eine Gruppe von zunächst 12 Vorschulkindern mittels halbstandardisierter, materialgestützter Einzelinterviews vor und nach dem Durchlaufen des Förderprogramms untersucht worden. Zur Verortung der Kinder und Sicherstellung einer ausreichenden Zählkompetenz wurde zu beiden Zeitpunkten zusätzlich der Osnabrücker Test zur Zahlbegriffsentwicklung durchgeführt. Für jedes Kind standen pro Testzeitpunkt mindestens drei Interviews zu maximal 30 Minuten an.

Die geometrischen Aufgaben bedienen verschiedene Fähigkeitsbereiche der Raumvorstellung, den Umgang mit Mustern, das Strukturieren von Flächen und Volumina auch im Sinne von Abmessungen und Übersetzungen zwischen verschiedenen Einheiten sowie das Verständnis für Seriation und Halbierungen. Beispielsweise wurde eine Aufgabe zu räumlichen Beziehungen in Punktmustern in Anlehnung an figurierte Zahlen und der Kompetenz „Muster und Strukturen“ der Bildungsstandards konzipiert: Den

Vorschulkindern wurden hierzu nacheinander zwei A4-Blätter mit je zwei Punktmustern gezeigt, jedes Mal mit der Aufforderung: „Verändere das (linke) Bild so, dass es aussieht wie das (rechte) Bild. Male was du verändern willst.“ Jedes Muster besteht aus sechs Punkten.



Als naheliegende Lösungsstrategien gelten für beide Aufgaben einerseits die Andeutung einer dynamischen Verschiebung eines Punktes unter Berücksichtigung der globalen Gesamtkonfiguration und andererseits das Streichen und/oder Hinzufügen von Punkten unter Berücksichtigung der einzelnen lokalen Veränderungen im statisch gedeuteten Muster. Weiterhin können die Punktmuster in Zeilen oder Spalten strukturiert und so die nötige Veränderung des Musters begründet werden. Bei Aufgabe A1 kann weiterhin die Kenntnis über das Würfelbild der Zahl 6 als Hilfe dienen.

Tatsächlich finden sich in den kindlichen Lösungen alle angenommenen Strategien bei beiden Aufgaben im Vor- und im Nachtest der Vorstudie wieder. Hinzu kommen Lösungsversuche, die nicht zur korrekten Lösung führen. Ursache ist hier immer eine zu einseitige Fokussierung nur der Form oder nur der Anzahl.

Die arithmetischen Kategorien des Prinzips des Um-eins-mehr/weniger-Werdens, des Kardinalzahlaspekts und der Teil-Ganzes-Beziehungen fanden in den Lösungsstrategien in dieser und anderen gestellten Aufgaben eine breite Anwendung. Aus den kindlichen Aussagen ergibt sich eine Abstufung, die sich von der Betrachtung des einzelnen geometrischen Kontextes bis hin zur Argumentation mittels eines tatsächlich arithmetischen Prinzips inklusive der Integration von Mengen- und Zahlenwissen erstreckt:

Um 1 mehr/weniger	Kardinalzahlaspekt	Teil-Ganzes-Beziehungen
<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Ein Punkt zu viel/wenig handelnd berichtet</li> <li>2. Begründung, dass ein Punkt zur Gleichheit mit einem anderen (Teil-)Muster fehlt/zu viel ist</li> <li>3. Unterschied von 1 bei benachbarten Zahlen genannt</li> </ol>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Abzählen (aller Punkte), keine weitere Verbindung zu Mengen/Anzahlkonzepten</li> <li>2. Nennung einer Anzahl eines (Teil-)Musters bei mengen-/formbasierter Begründung</li> <li>3. Vergleich von Anzahlen (gleiches Muster → gleiche Anzahl, nicht umgekehrt)</li> </ol>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Strukturierung in Teile (Teilanzahlen) ohne Bezug zum Ganzen</li> <li>2. Herstellen von Beziehungen zwischen Teilanzahlen und der Gesamtanzahl</li> </ol>

### 3. Ergebnisse der Vorstudie

Aufgrund der gewählten offenen Aufgabenstellung können die unterschiedlichen Lösungsstrategien und arithmetischen Kategorien nicht zur Beurteilung der Kompetenz des einzelnen Kindes dienen. Vielmehr kann einerseits die Wirkungsweise und Verknüpfung einzelner Strategien analysiert werden, andererseits lässt sich abbilden, welche Aufgabenaspekte das einzelne Kind als besonders wichtig erachtet und zur Lösungsfindung hervorhebt.

Die Vorstudie hat gezeigt, dass Vorschulkinder auf vielfältige Weise Mengen- und Zahlenwissen zur Lösung geometrischer Aufgaben hinzuziehen. Die Kinder quantifizieren hier nicht nur kontextbezogene Mengenbetrachtungen, sondern nutzen vereinzelt auch Kenntnisse über arithmetische Zusammenhänge für die Erschließung des geometrischen Problems. Besonders bei der geometrischen Strukturierung der Punktmuster scheinen die Kinder zugleich Anzahl- und Formaspekten betrachten zu müssen (vgl. Merschmeyer-Brüwer 2001). Die Kinder sind gefordert, über den Zusammenhang von Anzahlen und räumlicher Anordnung nachzudenken, sodass die geometrische Aufgabe auch einen Übergang vom Ordinal- zum Kardinalzahlaspekt anregt. Im Vergleich vom Vor- zum Nachtest ist sowohl eine Verbesserung in der Integration von Anzahl- und Formaspekten als auch in der Ableitung nötiger quantitativer Veränderungen aus Anzahlvergleichen feststellbar. Strukturierungen erfolgen schneller und sicherer.

### Literatur

- Aster, M. v. (2005): Wie kommen Zahlen in den Kopf? Ein Modell der normalen und abweichenden Entwicklung zahlenverarbeitender Hirnfunktionen. In: Aster, M. v. & Lorenz, J. H. (Hrsg.): Rechenstörungen bei Kindern. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht, 13-33.
- Dehaene, S. (1992): Varieties of numerical abilities. In: *Cognition*, 44, 1-42.
- Feigenson, L., Carey, S. & Spelke, E. (2002): The Representations Underlying Infant's Choice of More: Object Files Versus Analog Magnitudes. In: *Psychological Science*, 13/2, 150-156.
- Krajewski K. & Schneider, W. (2006): Mathematische Vorläuferfähigkeiten im Vorschulalter und ihre Vorhersagekraft für die Mathematikleistung bis zum Ende der Grundschulzeit. In: *Psychologie in Erziehung und Unterricht*, 53, 246-262.
- Merschmeyer-Brüwer, C. (2001): Räumliche Strukturierungsprozesse bei Grundschulkindern zu Bildern von Würfelkonfigurationen - Empirische Untersuchungen mit Augenbewegungsanalysen. Frankfurt a. M.: Lang.
- Resnick, L. B. (1989): Developing mathematical knowledge. In: *American Psychologist*, 44, 162-169.
- Wynn, K. (1995): Origins of numerical knowledge. In: *Mathematical Cognition*, 1, 35-60.