

Rita BORROMEO FERRI, Hamburg, WERNER BLUM, Kassel

Vorstellungen von Lernenden bei der Verwendung des Gleichheitszeichens an der Schnittstelle von Primar- und Sekundarstufe

Einführung und theoretischer Hintergrund

„Das „Ist-Gleich“ muss nach hinten, das ist immer so!“ (Lotta, Klasse 3)

Lotta, eine Schülerin aus unserer Studie, hat genaue Vorstellungen, wo das Gleichheitszeichen gesetzt werden muss – immer hinter dem Rechenterm, als reines Zuweisungszeichen. Ihre Aufgabe-Ergebnis-Deutung wird auch aus ihrem Testergebnis ersichtlich, u.a. dahingehend, dass sie Gleichungen der Form $x = a + b$ stets in die ihr bekannte Struktur $a + b = x$ umschreibt.

Die wissenschaftliche Diskussion zum Verständnis des Gleichheitszeichens bei Lernenden von der Vorschule bis zur Universität ist auf nationaler wie auf internationaler Ebene nicht neu. Viel zitiert ist die in den siebziger Jahren durchgeführte Studie von Behr, Erlwanger & Nichols (1980), in der 6- bis 12-Jährige zu ihrem Verständnis des Gleichheitszeichens befragt wurden, ebenso wie die Studie von Kieran (1981), die Vorschul-, Grund- und Sekundarstufenlernende sowie College Students umfasste. Die Methoden zur Erhebung der Vorstellungen der Probanden reichten von klinischen Interviews über Videographien bis zu standardisierten Tests mit offenen und geschlossenen Items. Die zentralen Ergebnisse der genannten und vieler weiterer Studien zeigen große Ähnlichkeiten und sollen in ihren Hauptpunkten kurz zusammengefasst werden:

- Das Gleichheitszeichen wird vornehmlich als *Handlungszeichen*, als „ergibt“ verstanden und nicht als *Beziehungszeichen*; demnach wird z.B. eine Gleichung wie $3+2=2+3$ nicht akzeptiert, sondern neu dargestellt als $3+2=5$ und $2+3=5$.
- Darstellungen wie $3=3$, ohne Operationszeichen, werden nicht akzeptiert, da sie zu keiner Handlung anregen.
- Die Vorstellungen vom Gleichheitszeichens als Handlungszeichen ändern sich nicht wesentlich von der Grundschule bis in den Sekundarbereich (siehe auch Knuth et al. 2006), zum Teil sogar nicht bis in den tertiären Bereich.

Vor allem die Vernachlässigung, beide Vorstellungen vom Gleichheitszeichen, als Zuweisungs- und als Beziehungszeichen (u.a. Malle 1993) bereits in der Grundschule zu thematisieren, hat zur Folge, dass Fehlvorstellungen vom Gleichheitszeichen ein sicheres Verständnis beim Umgang mit Vari-

ablen und algebraischen Gleichungen behindern können (siehe auch Mevarech & Yitschak 1993). U.a. schon Winter (1996) hat betont, dass in der Grundschule beide Vorstellungen vom Gleichheitszeichen aufgebaut werden müssen, sowohl die genetisch primäre als Handlungszeichen als auch die kognitiv auf höherer Ebene angesiedelte als Relationszeichen, auch um den Übergang von der Arithmetik zur Algebra angemessen vorzubereiten. Der Wechsel zwischen beiden Vorstellungen wird von Lernenden in der Regel nicht alleine vollzogen und bedarf, so Malle (1993), extrinsischer Anstöße. Ein Blick in den Rahmenplan für die Primarstufe in Hamburg verdeutlicht die verbindliche Einführung des Gleichheitszeichens (im Sinne einer „Waage“) in den ersten beiden Jahrgängen der Grundschule. In den Rahmenplänen der weiterführenden Schulen wird jedoch nicht mehr spezifisch auf das Gleichheitszeichen eingegangen – seine Bedeutung und Verwendung (und damit auch eine mögliche Einseitigkeit) werden vorausgesetzt und nicht mehr gesondert thematisiert.

Die hier kurz aufgezeigten Hintergründe der genannten empirischen Studien zum Gleichheitszeichen haben uns dazu veranlasst, an jene Studien anzuknüpfen, um einen Eindruck davon zu erlangen, inwieweit sich an der Schnittstelle von Primar- und Sekundarstufe die Vorstellungen vom Gleichheitszeichen, auch im Zuge eines kompetenzorientierten Mathematikunterrichts, inzwischen womöglich geändert haben.

Hypothesen und Methoden der Studie

Folgende zentrale Hypothesen sollten überprüft werden:

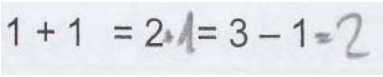
- Die Vorstellung der Lernenden vom Gleichheitszeichen als Handlungszeichen hat in der Grundschule (immer noch) Priorität, aber nicht mehr in der Sekundarstufe.
- Im querschnittlichen Vergleich der Klassen 3-6 zeigen sich jeweils bedeutsame Unterschiede bei der Sicherheit im Umgehen mit dem Gleichheitszeichen.

Die Studie umfasste insgesamt N=188 Lernende aus verschiedenen Grund- und Stadtteilschulen aus Hamburg. Davon waren 51 Kinder aus der 3. Klasse, 69 aus Klasse 4, 45 aus Klasse 5 und 23 aus Klasse 6.

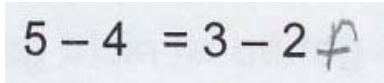
Die Testitems wurden zum Teil aus bestehenden Studien entnommen und mit neu entwickelten Items ergänzt, damit verschiedene Facetten der Vorstellungen vom Gleichheitszeichen erhoben werden konnten. Der Test wurde auf 20 min konzipiert und besteht aus drei Blöcken. Im ersten Teil sollten die vorhandenen Vorstellungen zum Gleichheitszeichen erhoben werden. So mussten u.a. folgende Aussagen bewertet werden: a) Das

Gleichheitszeichen führt immer von einer Aufgabe zum Ergebnis. b) Es kann wie eine Waage verstanden werden; alles, was links davon steht, hat denselben Wert wie das, was rechts davon steht. Zudem sollten die Lernenden die Aussage „ $1+1=2$ “ in eigenen Worten ausdrücken. Dann folgten im zweiten Block so genannte „Kettenaufgaben“ wie z.B. „ $1+1=2+1=3+1=4$ “, die nach ihrer Richtigkeit beurteilt werden sollten, sowie Aufgaben, bei denen das Additions-, das Subtraktions- und das Gleichheitszeichen in Lücken eingesetzt werden mussten, z.B.: „ $3_5_9_1$ “. Letztgenannte Aufgaben beinhalten somit auch eine substantielle Problemlösekomponente. Im dritten Block gab es zwei Anwendungsaufgaben. Zusätzlich wurden vier Schüler- und drei Lehrerinterviews auf der Basis eines Leitfadens geführt. Die Items wurden alle mit 0/1 kodiert und mit dem dichotomen Raschmodell skaliert (Reliabilität: (.714).

Ergebnisse

Wie bereits im Eingangszitat verdeutlicht, repräsentiert Lotta den Großteil der Schülerinnen und Schüler der Studie, die das Gleichheitszeichen vorrangig als Handlungszeichen verstehen. Dass diese Priorität immer noch besteht, zeigte sich durch verschiedene Testitems. So gab es im ersten Testblock mit 67% eine deutliche Präferenz für Aussage a), bei der die Handlungsvorstellung betont wird. Auch bei der Verbalisierung von „ $1+1=2$ “ offenbarte ein Viertel der Probanden die „Ergibt-Vorstellung“, was sich u.a. so ausdrückte: „eins plus eins ergibt zwei“ oder „eins addiert mit eins ist zwei.“ Die Hypothese der starken Ergebnisorientierung zeigte sich vor allem bei den Resultaten im zweiten Testblock. Es zeigte sich, dass folgende Aufgabe die schwierigste für die Lernenden war: „ $3_5_9_1$ “, gefolgt von „ $1+1=2+1=3+1=4$ “. Das erstgenannte Item wurde nur von 13% der Lernenden richtig gelöst, zudem zeigten sich keine Effekte über die Klassenstufen hinweg, d.h. die Sechstklässler waren nicht besser als die Drittklässler. Generell konnte nur ein statistisch signifikanter Unterschied mit .18 zwischen Klasse 3 und 4 festgestellt werden, nicht aber zwischen den Klassen 4 und 5 sowie zwischen 5 und 6. Dies widerlegt somit die eingangs genannte Hypothese, dass im Sekundarstufenbereich die Handlungsvorstellung nicht mehr dominiert. Ein genauerer Blick in die Testbögen der Lernenden offenbart dabei nicht nur, ob die Items richtig oder falsch gelöst sind.  Fast noch aufschlussreicher war der Eingriff der Schülerinnen und Schüler in die Gleichungen, damit diese ihren Vorstellungen von der Bedeutung des Gleichheitszeichens entsprechen, wie das obige Beispiel eines Fünftklässlers zeigt. Interessant ist z.B. auch die folgende, von einem Drittklässler als falsch markierte Gleichung, die offen-

bart, wie sehr der Schüler das Zuweisungszeichen verinnerlicht hat. Das obige Zitat von Lotta war das Ende einer vorhergehenden Konversation, bei der sie vom Interviewer gefragt wurde, ob man auch „ $11 = 5 + 6$ “ schreiben kann. Sie zögerte und antwortete. „Nein, ich glaub‘ nicht. Das ist doch unlogisch. Das ist doch keine Aufgabe und ein Ergebnis hat die auch nicht.“



A photograph of a handwritten mathematical equation $5 - 4 = 3 - 2$ written in black ink on a light-colored surface. A small checkmark is drawn to the right of the equation.

Resümee

Die Ergebnisse unserer Untersuchung fassen wir wie folgt zusammen:

- Die Vorstellung der Lernenden vom Gleichheitszeichen als Handlungszeichen hat (immer noch) Priorität, auch in Klasse 5/6.
- Im querschnittlichen Vergleich der Klassen 3-6 zeigen sich einerseits sichtbare Unterschiede beim Umgehen mit dem Gleichheitszeichen, andererseits noch keine substantiellen Veränderungen bei den Vorstellungen zum Gleichheitszeichen.

Die Konsequenzen für Schule und Lehrerausbildung liegen auf der Hand: Zum einen die bewusste Vermittlung von „ $=$ “ als Relationszeichen schon in der Grundschule (Winter 1982 spricht von einer „Algebraisierung des Arithmetikunterrichts“) und ein ebenso bewusstes Wiederaufgreifen in der Sekundarstufe, und zum anderen eine Bewusstmachung dieser Problematik, v.a. auch im Hinblick auf Diagnostik, und ein Aufzeigen passender Lernumgebungen für die Klassen 3-6 in der Lehreraus- und -fortbildung.

Literatur

- Behr, M., Erlwanger, S. & Nichols, E. (1980): How children view the equal sign. In: *Mathematics Teaching*, 92, 13-18.
- Malle, G. (1993): *Didaktische Probleme der elementaren Algebra*. Wiesbaden: Vieweg
- Mevarech, Z.; & Yitschak, D. (1993): Students' misconceptions of equivalence relationship. In: Hershkowitz, R., *Proceedings of PME 7 (Israel)*, 313-318.
- Kieran, C. (1981): Concepts Associated with the Equality Symbol. In: *Educational Studies in Mathematics*, 12, 317-326.
- Knuth, E. et al. (2006): Does Understanding the Equal Sign Matter? Evidence from Solving Equations. In: *Journal for Research in Mathematics Education*, 37(4), 297-312.
- Winter, H. (1982): Das Gleichheitszeichen im Mathematikunterricht der Primarstufe. In: *mathematica didactica* 5(4), 185-211
- Winter, H. (1996): *Mathematik entdecken*. Frankfurt a.M.: Cornelsen