

Birgit BRANDL, Augsburg

Das räumliche Vorstellungsvermögen im Mathematikunterricht fördern

1. Empirische Befunde zum räumlichen Vorstellungsvermögen

Unter räumlichem Vorstellungsvermögen (Synonyme: Raumvorstellung, Raumvorstellungsvermögen) versteht man die „Fähigkeit, in der Vorstellung räumlich zu sehen und räumlich zu denken“ (Wölpert, 1983, S. 9). Raumvorstellung wird in fast allen faktorenanalytischen Intelligenzmodellen als separater Faktor ausgewiesen und gilt als einer der am besten untersuchten Fähigkeiten menschlicher Begabung (Maier, 1999a).

Ein gutes räumliches Vorstellungsvermögen ist nur zum Teil angeboren (Maier, 1996c) und muss im Verlauf der weiteren Entwicklung erlernt werden (Maier, 1996b). Bis zu einem Alter von 9 bis 10 Jahren sind ca. 50% und bis zum Alter von 12-14 Jahren ungefähr 80% der Raumvorstellungsfähigkeit (bezogen auf die Leistung von Erwachsenen) entwickelt (Bloom, 1979, zitiert nach Wölpert, 1983). Da die Steigerung des räumlichen Vorstellungsvermögens, auch im Vergleich zu anderen Intelligenzfaktoren, in den Klassen 5 bis 8 am größten ist, erscheint eine besondere Förderung im Mathematikunterricht in diesen Jahrgangsstufen sinnvoll und wichtig (Müller, 1986).

Über 120 Studien belegen, dass Frauen eine schlechter ausgeprägte Raumvorstellung haben als Männer (Maier, 1999a). Damit sind die Geschlechtsunterschiede auf diesem Gebiet der Mathematik vergleichsweise stark ausgeprägt. Allerdings lassen sich die Geschlechtsunterschiede in Bezug auf die Raumvorstellung erst ab der Pubertät beobachten (Müller, 1986). Studien belegen interessanterweise eine stärkere Leistungssteigerung weiblicher Probanden (im Vergleich zu den männlichen Teilnehmern) durch Training (Maier, 1999a). Wichtig festzuhalten ist außerdem, dass starke Geschlechtsunterschiede vorwiegend bei Speed-Tests, bei denen die Bearbeitungszeit begrenzt ist, jedoch nicht so sehr bei Power-Tests, zu deren Bearbeitung kein zeitliches Limit vorgegeben wird, beobachtet werden konnten (Maier, 1999a). Für den Schulalltag bedeutet dies, dass man den Schülerinnen und Schülern gerade im Bereich der Förderung der Raumvorstellung stets ausreichend Zeit gewähren sollte.

Untersuchungen zum Geometrieunterricht zeigen, dass Raumvorstellung und Raumgeometrie im Geometrieunterricht eine untergeordnete Rolle spielen und der Schwerpunkt auf der zweidimensionalen Geometrie liegt (Maier, 1999b). In der Raumgeometrie dominieren Berechnungen, während

formenkundliche und zeichnerische Inhalte stark vernachlässigt werden (Maier, 1999b). Die am intensivsten behandelten Inhalte der Raumgeometrie fördern also die Entwicklung der Raumvorstellung nur sehr unzureichend (Maier, 1997).

Daher stellt sich nun die Frage, wie ein Geometrieunterricht aussieht, der das räumliche Vorstellungsvermögen fördert. In Studien wurde gezeigt, dass ein Training, das auf handlungsorientierten Aktivitäten mit Modellen und Medien basiert, starke bis sehr starke Effekte zeigt (Maier, 1996a & Maier, 1997). Die Trainingsphase darf nicht zu kurz sein und die Inhalte müssen echten räumlichen Charakter haben. Bei der Einführung neuer Körper sollte so z.B. der Schwerpunkt auf deren räumlichen Eigenschaften, und nicht auf den neuen Bezeichnungen liegen.

2. Fördermöglichkeiten in der Praxis

Von den zahlreichen Möglichkeiten, die Raumvorstellung im Geometrieunterricht angemessen und effektiv zu fördern, sollen hier die Möglichkeiten der Förderung mittels Kopfgeometrie mit Würfeln und der Einsatz von Pentakuben näher beschrieben werden.

Unter **Kopfgeometrie** versteht man das Lösen geometrischer Aufgaben im Kopf. Dies „erfordert die Fähigkeit, sich geometrische Gebilde vorstellen zu können, ihre Lage, ihre Größe und ihre Form zu variieren, sie zu kombinieren und dabei das Wissen über sie anzuwenden“ (Gimpel, 1992, S. 257). Zu Beginn sollte Kopfgeometrie zunächst handelnd mit Material betrieben werden. Langsam kann dann eine Loslösung vom konkreten Tun erfolgen.

Eine schöne kopfgeometrische Aufgabe, die z.B. zu Beginn einer Mathematikstunde einige Minuten lang durchgeführt werden kann, ist die folgende: die Lehrkraft beschreibt die Ausgangsposition eines Würfels („Die Drei liegt vorne, die Sechs oben und die Fünf rechts.“) und gibt eine Kippfolge vor (z.B. „Nun wird der Würfel zuerst nach rechts und dann nach hinten gekippt.“). Die Frage ist nun, welche Zahl am Ende oben liegt. Erfahrungen aus dem Unterricht zeigen, dass Schülerinnen und Schüler viel Freude an dieser Aufgabe haben und die Kippfolgen mit zunehmender Übung immer komplizierter werden können. Neben der Raumvorstellung werden zugleich Merk- und Konzentrationsfähigkeit trainiert.

Auch Würfelnetze eignen sich für kopfgeometrische Aufgabenstellungen. Mittels sechs quadratischen Notizzetteln lassen sich 35 verschiedene Anordnungen finden, bei denen je zwei der sechs Quadrate mindestens eine Kante gemeinsam haben. Unter diesen 35 Anordnungen lassen sich nun die elf nicht-kongruenten Würfelnetze identifizieren (Ilgner, 1974).

Weiter kann an dieser Stelle eine Aufgabenstellung zur Vernetzung von Raumvorstellung und Kombinatorik im Unterricht behandelt werden (Besuden & Flachsmeyer, 1996): Um aus dem in Abb. 1 gezeigten Würfelnetz wieder einen Würfel herzustellen, benötigt man sieben Klebelaschen. Die Frage ist nun, wie viele verschiedene Möglichkeiten es gibt, diese Laschen anzubringen. Lässt man kongruente Würfelnetze zu (denkt sich die Quadratseiten also als unterscheidbar), kommt man auf $2^7 = 128$ Möglichkeiten. Lässt man nur nicht-kongruente Würfelnetze zu, verringert sich die Anzahl auf 72 Möglichkeiten.

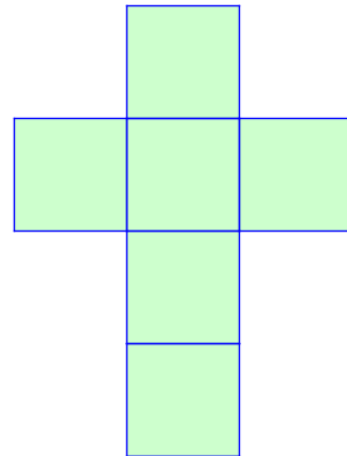


Abb. 1

Auch kopfgeometrische Aufgaben, bei denen den Lernenden keine Hilfsmittel zur Verfügung gestellt werden und die rein mündlich vorgetragen werden, sind eine reizvolle Übung. Die folgende Aufgabe stammt aus Gimpel (1992): „Man stelle sich in der Grundfläche eines Würfels eine Diagonale und in seiner Deckfläche eine zweite Diagonale vor, die zur ersten nicht parallel, sondern windschief verläuft. Was für ein Körper entsteht, wenn man jeden Eckpunkt der einen Diagonale mit den beiden Eckpunkten der anderen Diagonale verbindet?“ (ebd., S. 262).

Neben kopfgeometrischen Aufgaben lassen sich **Pentakuben** vielfältig zur Förderung der Raumvorstellung einsetzen. Pentakuben sind zusammengesetzte geometrische Körper aus fünf kongruenten Würfeln, bei denen je zwei Würfel immer eine Seitenfläche gemeinsam haben (vgl. Abb. 2). Insgesamt gibt es 29 verschiedene Anordnungen von Pentakuben.

Zum Kennenlernen der Pentakuben ist es sinnvoll, die Lernenden erst einmal möglichst viele verschiedene Pentakuben finden zu lassen, diese zu klassifizieren und auf Symmetrie (z.B. mit Spiegelkacheln als Hilfsmittel) untersuchen zu lassen. Eine Übung, die die Raumvorstellung schult, ist das Zeichnen von Pentakuben im gewöhnlichen Schrägbild oder auf Punktepapier. Der Schwierigkeitsgrad dieser Übung lässt sich steigern, wenn die Pentakuben aus dem Gedächtnis gezeichnet oder vor dem geistigen Auge gedreht werden müssen, bevor sie zu Papier gebracht werden.

Weiter bieten sich das Bauen von Gebäuden aus Pentakuben (vgl. hierzu Künzell, 1995 und Brandl & Brandl, 2010) und das Spiel „Pentakubenquartett“ als förderliche Übungen an (Brandl & Brandl, 2010). Für die einzelnen Quartette wurde jeweils ein Pentakubenstein aus vier verschiedenen Perspektiven (vgl. Abb. 2) fotografiert. Aufgabe ist es nun, wie

beim gewöhnlichen Quartettspiel die vier zusammengehörigen Karten zu finden. Kopiervorlagen für dieses Spiel finden sich in Brandl & Brandl (2010).

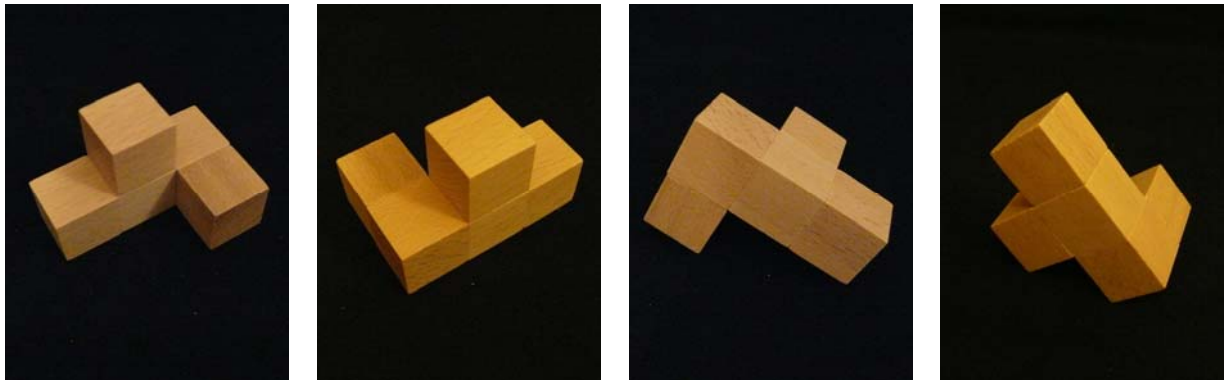


Abb. 2 (Fotos: B. Brandl)

Literatur

- Besuden, H. & Flachsmeier, J. (1996). Der gefaltete Würfel (Folge 1). *Mathematik in der Schule*, 34 (10), 546-550.
- Brandl, B. & Brandl, M. (2010). Kopfkrobatik mit Pentakuben. In V. Ulm (Hrsg.), *Mathematische Begabungen fördern* (S. 68-77). Berlin: Cornelsen Scriptor.
- Gimpel, M. (1992). Was ist und was soll Kopfgeometrie. *Mathematik in der Schule*, 30(5), 257-265.
- Ilgner, K. (1974). Die Entwicklung des räumlichen Vorstellungsvermögens von Klasse 1 bis 10. *Mathematik in der Schule*, 12, 693-714.
- Künzell, E. (1995). *Spiele mit Pentakuben* (5. Auflage). Aachen: E. Künzell.
- Maier, P.H. (1999a). Räumliches Vorstellungsvermögen. Ein theoretischer Abriß des Phänomens räumliches Vorstellungsvermögen (1. Aufl.). Donauwörth: Auer.
- Maier, P.H. (1999b). Raumgeometrie mit Raumvorstellung – Thesen zur Neustrukturierung des Geometrieunterrichts. *Der Mathematikunterricht*, 45(3), 4-17.
- Maier, P.H. (1997). Raumvorstellung schulen – Geometrische Körper selber bauen. *Beiträge zum Mathematikunterricht*, 347-350.
- Maier, P.H. (1996a). Kopfgeometrie – Handlungsorientierte und visuelle Aufgabenstellungen. *Mathematik in der Schule*, 34, 276-284.
- Maier, P.H. (1996c). Die Trainierbarkeit der Raumvorstellung in der Hauptschule. *Pädagogische Welt*, 50(2), 50-54.
- Maier, P.H. (1996d). Ist das räumliche Vorstellungsvermögen trainierbar? *Grundschule*, 3, 9-11.
- Müller, K.P. (1986). Raumvorstellung. Was ist das, und warum ist sie wichtig? *Pädagogische Welt*, 40, 23-26.
- Wölpert, H. (1983). Materialien zur Entwicklung der Raumvorstellung im Mathematikunterricht. *Der Mathematikunterricht*, 6, 7-42.