Hans-Joachim BRENNER, Erfurt

Zur Rolle der Physik im Mathematikunterricht

1 Rahmen

Ein Schwerpunkt des Mathematikunterrichts ist die Erarbeitung von tragfähigen Vorstellungen zu grundlegenden Konzepten der Mathematik. Besonders geeignet dafür ist die Beschäftigung mit denjenigen naturwissenschaftlichen Phänomenen, die ein Hineindeuten von fundamentalen Mustern in einem entdecken lassenden Unterricht ermöglichen, bei denen Schlussfolgerungen eindrucksvoll bestätigt werden können und die vielfältiges Vernetzen von Wissen gestatten. Mit bekannten und weniger bekannten Beispielen hierfür müssen Lehrerinnen und Lehrern eng vertraut sein, um die Untersuchung dieser Erscheinungen für die jeweilige Klassen- und Unterrichtssituation modifizieren zu können.

2. Ausgangspunkte

Die Mathematik als formale Wissenschaft untersucht Phänomene zwischen uninterpretierten Objekten und Begriffen; die Anwendung der Erkenntnisse erfolgt häufig erst mithilfe der entwickelten Theorie. In der Schule gewinnt in den Sekundarstufen I und II das Lernen vom Allgemeinen zum Konkreten zunehmend an Bedeutung, ohne dass der umgekehrte Fall an Bedeutung verliert! Das Verhältnis von theoretischem und empirischem Lernen ist entsprechend der Lernsituation auszugestalten. Dabei sind auch in der Sekundarstufe II wichtige Phänomene der Naturwissenschaften Ausgangspunkte von Mathematisierungen. Insbesondere gilt es das Potenzial unserer physikalischen Intuition im viel größeren Umfang im Unterricht zu nutzen. „Mechanical intuition is a basic attribute of our intellect, as basic as our geometrical imagination, and not to use it is to neglect a powerful tool we possess.“(Levi 2009) G. Polya zitiert in seinem Buch „Mathematik und plausibles Schließen“ H. Poincare: „Sie (die Physik, HJB) lässt uns die Lösung vorausahnen, sie legt uns passende Ideenverbindungen nahe.“ und führt einige Beispiele an, die Ausgangspunkte für die Entwicklung von Unterricht sein sollten. Die Physik schenkt uns die Möglichkeit, plausibles Argumentieren zu üben und so stärker als bei demonstrativen Argumentationen Inhalte zu vernetzen (Polya 1962). Es gilt zu beachten, dass „The two objects (Ma/Ph, HJB) are so intimately intertwined that both suffer if separated.“ (Levi 2009)

Beispiel Ableitung des Sinusfunktion: Die Schüler untersuchen die gleichförmige Kreisbewegung (in gleichen Zeiten werden gleich lange Bögen zurückgelegt). Zu Beginn nehme ich ein Rad eines Fahrrades und befestige an der Felge eine rote Klammer (nach der Einführung leistet der Computer gute Dienste, z.B. bei der rationellen Berechnung von Durchschnittsgeschwindigkeiten und deren graphischer Darstellung). Die Bewegung des gewählten Punktes wird in Richtung der Achse und senkrecht zur Achse und einer beliebigen Richtung der Ebene beobachtet: gleichförmige Kreisbewegung bzw. Hoch- und Hinunterbewegung auf einer Strecke. Die Ableitung der Sinusfunktion $y = r \cdot sin\alpha$ **ist** die Momentangeschwindigkeit des Punktes auf der Strecke (im Unterricht zunächst so; mit wachsender Formalisierung: lässt sich als … interpretieren). Man zeichnet zwei gleich lange Pfeile für die Umlaufgeschwindigkeiten mit der Länge v an die Kreisbahn: beim Durchgang durch die Nulllage und in einem beliebigen Punkt P. Der Pfeil in P wird in Komponenten in Richtung der gewählten Achsen zerlegt und gedeutet. Die Komponente in y-Richtung der Länge $v \cdot cos\alpha$ (folgt aus der Betrachtung ähnlicher Dreiecke) beschreibt die Geschwindigkeit des sich bewegenden Punktes bei der Bewegung auf der Strecke. Die Länge der y-Komponente ist $\omega \cdot r \cdot \cos(\omega \cdot t)$ - erstes Beispiel für die Kettenregel.

3. Situation und Probleme

Ich wähle meine Ziele gemäß dem Allgemeinbildungskonzept von H. Winter (Mathematik als Schule der Anschauung): „Mittels begrifflicher Instrumente der Elementarmathematik können und sollen strukturelle Züge in wichtigen Phänomenen und Lebensbereichen unserer Welt aufgedeckt werden, so dass Verständnis, Aufklärung und Anteilnahme möglich werden.“ Eine wichtige Rolle dabei spielt die Entwicklung von Vorstellungen. Vom Hofe betont (vom Hofe 2005), dass mathematische Grundvorstellungen aktuell „konstruktivistisch interpretiert“ werden, also „nicht als rezeptiv erworbene stabile Repräsentationen mathematischer Inhalte“ angesehen werden, sondern betont die Ausbildung eines „Netzwerkes, das sich durch Erweiterung von alten und Zugewinn von neuen Vorstellungen zu einem immer leistungsfähigeren System mentaler mathematischer Modelle entwickelt.“

Der Folgerung stimme ich im vollen Umfang zu; der zu Grunde liegenden einseitigen Interpretation konstruktivistischer Lerntheorien ausdrücklich nicht. Lernen ist immer ein aktiver Prozess, in dem wir uns in der Schule vorrangig mit der Aneignung des Bildungsgutes - den Erfahrungen der vor uns lebenden Menschen (Poppers dritte Welt) - beschäftigen. Ein Hauptproblem des Lehrens besteht darin, eine aktive und auf Vernetzung gerichtete Aneignung des Lehrstoffs zu *ermöglichen*. (Die Wahl der Lernformen entsprechend der Klassensituation liegt ebenfalls in der Hand des Lehrers.)

Den Zusammenhängen zwischen Modellbildungsprozessen und dem Beweisen ist im Unterricht mehr Aufmerksamkeit zu schenken, um den Mangel an Begründungen für mathematische Konzepte und Kalküle wirksam entgegentreten zu können. (H. N. Janke 2008, M. Niss 2005)

Mikelskis-Seifert fordert, das Arbeiten mit Modellen anhand von vielfältigen Themen zu üben, weil „das Modellieren eher stiefmütterlich im Physikunterricht behandelt wird“ und um den naiven Realismus der Schüler (und Lehrer, HJB) bezogen auf die naturwissenschaftliche Erkenntnisgewinnung überwinden zu können (Mikelskis-Seifert 2010). Weil die Erarbeitung von Realmodellen sehr schwierig ist, ist der Mathematikunterricht auf die Vorleistungen der naturwissenschaftlichen Fächer angewiesen, um Lernzeit zu gewinnen und das zu Lernende in der Lebensumwelt der Schüler verankern zu können. Neben der Entwicklung von mathematischen Modellen steht mit zunehmenden Schulalter die Erarbeitung einer „anwendungsfähigen Mathematik“ (E. Wittmann 2005) immer mehr im Vordergrund. K.-H. Lotze schreibt über die Situation des Physikunterrichts (Jena 2010): „Von Seiten der Fachdidaktik wird der Vorwurf erhoben, die Physik werde „zerrechnet“, Lehrplankommissionen formulieren die Entmathematisierung“ des Physikunterrichts als Ziel, und sogar die Forderung eines „absoluten Formelverbots bis zum Ende der Jahrgangsstufe 10“ wurde laut. Etwas moderater heißt es, dass im Zentrum des Physikunterrichts das Experiment zu stehen habe und die Mathematik in ihm auf das unbedingt Notwendige zu reduzieren sei.“ Der Vorwurf des „Zerrechnens“ für beide Fächer gerechtfertigt. Weiterhin sollten im Mathematik- und im Physikunterricht Formelwerke in der Regel nicht zugelassen sein, damit die Schüler immer wieder Gelegenheit haben, am konkreten Beispiel die Zusammenhänge herzuleiten und die Formeln zu abstrahieren. Erst wenn das langweilig wird, greift man zur Formel. *Die Reduzierung des jeweils anderen Faches auf das Notwendigste hat im Mathematik- und im Physikunterricht unglaublichen Schaden angerichtet!*

4. Beispiele (um deren größere Bekanntheit ich mich bemühe)

Lineares Wachstum: Ausgangspunkt der Untersuchungen ist die Funktionalgleichung. Die Analyse von Bewegungsvorgängen gestattet Sinngebung und intuitive Verankerung. Dabei bedeutet eine Beschleunigung $a = 3\frac{m}{s^2}$, dass sich die Geschwindigkeit um $3\frac{m}{s}$ in jeder Sekunde vergrößert, wenn sie gleichmäßig wächst.

Exponentielles Wachstum/Abnahme: Ausgangspunkt ist wieder die Funktionalgleichung. Die Schüler erhalten zunächst die Aufgabe, einen gut springenden Ball aus 1m Höhe fallen zu lassen und die maximale Höhe nach dem Aufprall zu bestimmen. Problem: Sage die maximale Sprunghöhe nach dem 2. Aufprall voraus. Die weiteren Sprunghöhen sind experimentell zu bestimmen, mit den Ergebnissen der Rechnungen im Modell zu vergleichen und graphisch darzustellen. Beim radioaktiven Zerfall gehen wir davon aus, dass pro Zeiteinheit der gleiche Anteil von Kernen zerfällt. $N(t) = N_0 \cdot e^{-\vartheta t}$

Modell des Kontinuums: Beim freien Fall aus der Ruhelage nehmen wir an, dass sich durch eine gleichbleibende Kraft die Geschwindigkeit pro Zeiteinheit stets um den gleichen Betrag vergrößert. Den zurückgelegten Weg kann man mit Hilfe der *Durchschnittsgeschwindigkeit* bestimmen, die in diesem Fall das arithmetische Mittel von 0 und der Endgeschwindigkeit *v* ist. In einer Formel: $s = \frac{v}{2} \cdot t$. *Mittelwerte* treten auch beim Mischen auf. In eine Badewanne werden 8 Eimer Wasser von jeweils 50°C gegossen. Da das zu heiß wird, gießt man noch 2 Eimer von 20°C hinzu. Reicht das? Hinweis auf die Analogie (falls die Schüler nicht schon längst selbst darauf gekommen sind): 8 Mann mit je 50€ und 2 Mann mit je 20€; wie viel erhält jeder, wenn sie das Geld gleich aufteilen? (Graphische Lösung dieses Problems – mit Hilfe der Diagonale im Rechteck – in alten Physikbüchern)

Zwei Personen P1 und P2 laufen von A nach B; sie starten gleichzeitig und kommen auch zur gleichen Zeit an. P1 läuft mit gleichbleibender Geschwindigkeit; bei P2 ändert sich die Geschwindigkeit während des Laufes. Dann gibt es mindestens einen Zeitpunkt, zu dem P2 die Geschwindigkeit von P1 hat (MWS). Die reellen Zahlen als Objekte unseres Geistes haben wunderbare Eigenschaften. Strecken der Länge $\sqrt{2}$ gibt es; Objekte in der Natur dieser Länge gibt es aber nicht.

Modell der Unabhängigkeit, Superpositionsprinzip: Eine kleine und eine große Stahlkugel fallen aus gleicher Höhe und schlagen hörbar zur gleichen Zeit auf. Stößt man die kleinere durch die größere vom Tischrand, dann schlagen beide immer noch gleichzeitig auf, obwohl sie unterschiedliche Parabelbahnen durchflogen haben.

Exponentielle Verteilung: Die Lebensdauer von Kernen radioaktiver Isotope hängt nicht vom „Alter“ des Kerns ab. Ist $P(T > r)$ die Wahrscheinlichkeit, dass die Lebensdauer T > *r* ist, dann gilt
$P(T > r + s) = P(T > r) \cdot P(T > r + s | T > r) = P(T > r) \cdot P(T > s)$
und somit $N(T > t) = N_0 \cdot c^t = N_0 \cdot e^{-\vartheta t}$ (Erwartungswert).

5. Literatur

Mark Levi; The Mathematical Mechanic; Princeton University Press; 2009