Julia CRAMER, Bremen

„Ausnahmen bestätigen die Regel!“ – Die Rolle von Alltagsargumentationen bei der Bearbeitung mathematischer Aufgaben

1. Ziele und Fragestellungen

Ziel dieser Studie ist es, Beziehungen zwischen Argumentation und Wissenskonstruktion näher zu untersuchen. Dabei stellt sich nicht die Frage, ob durch Argumentationen Wissen aufgebaut werden kann, sondern wie dies geschieht. Bisher fehlen in der Forschung Verknüpfungen zwischen Theorien der Wissenskonstruktion und der Argumentation. Ein erster Ansatz, wie solche Beziehungen untersucht werden können, wird in diesem Beitrag vorgestellt. Da verschiedene Beispiele in der Literatur (Martin & Harel 1989, Galbraith 1981) zeigen, dass Schüler/Innen bei der Bearbeitung mathematischer Aufgaben Erfahrungen aus Alltagsargumentationen nutzen, soll in dieser Untersuchung auch die Rolle von Alltagsargumentationen in den Blick genommen werden. Hierzu werden die verwendeten Schlussregeln mit Hilfe einer Sammlung topischer Schemata aus der Rhetorik beschrieben. Insgesamt werden drei Analyseinstrumente komplementär eingesetzt um den folgenden Fragestellungen nachzugehen:

- Wie verlaufen in diesen Situationen Prozesse der Argumentation und der Wissenskonstruktion? Zeigen sich charakteristische Muster? Welche Beziehungen zwischen diesen Prozessen bestehen?
- Wie schließen die Schüler/Innen in den untersuchten Situationen? Welche Schlussweisen aus dem Alltag nutzen sie? Wie hängt dies mit den epistemischen Prozessen zusammen?

2. Theoretischer Hintergrund

Argumentation

In vielen Untersuchungen zu Beweis- und Argumentationsprozessen wird das Toulmin-Schema (Toulmin 1996) als Analyseinstrument eingesetzt, um die Struktur von Argumentationen zu beschreiben. In diesem Schema werden Bestandteile von Argumentationen hinsichtlich ihrer Funktion in Datum, Konklusion, Schlussregel, Stützung und Operator unterschieden. Die Konklusion ist die Behauptung, die hergeleitet werden soll. Daten sind unbestrittene Fakten, auf die die Konklusion zurückgeführt wird. Der Schritt vom Datum auf die Konklusion wird durch eine Schlussregel erklärt. Die Anwendung dieser Schlussregel kann durch eine Stützung begründet werden. Ein Operator schränkt die Gültigkeit der Konklusion ein oder gibt

Ausnahmebedingungen an. Konklusionen, die im Argumentationsprozess als geltend akzeptiert werden, können im Folgenden als Daten oder Schlussregeln verwendet werden. Wird ein Element (z.B. ein Datum) der Argumentation in Frage gestellt, wird es zu einer Konklusion, die nun selbst hergeleitet werden muss.

Das Toulmin-Schema erfasst jedoch nicht, welche Arten von Schlussregeln verwendet werden. Diese werden mit Hilfe eines Katalogs topischer Schemata (Ottmers 2007) beschrieben. Ottmers beschreibt zwei Großklassen: alltagslogische und konventionalisierte Schlussweisen. Die alltagslogischen Schlüsse basieren dabei auf Strukturen, die logischen Schlussweisen ähneln. Hierzu zählt Ottmers Kausal-, Vergleichs-, Gegensatz- und Einordnungsschlüsse sowie Beispielargumentationen. Die ersten vier Schlüsse sind eher deduktiver Natur, die Beispielargumentation induktiver Natur. Kausalschlüsse nutzen Ursache-Wirkungs-, Grund-Folge- oder Mittel-Zweck-Relationen. Vergleichsschlüsse stellen Beziehungen zwischen gleichen, ähnlichen oder verschiedenen Situationen her und schließen dann auf gleiche, ähnliche oder verschiedene Eigenschaften oder Bedingungen der Situationen. Gegensatzsschlüsse beziehen sich auf eine Situation, in der nicht gleichzeitig gegensätzliche Bedingungen oder Eigenschaften vorliegen können. Bei einem Einordnungsschluss wird von Definitionen auf die Eigenschaften eines Objekts geschlossen. Hinsichtlich der Beispielargumentationen unterscheidet Ottmers illustrative und induktive Beispiele. Illustrative Beispiele zeigen, dass eine Behauptung in verschiedenen, konkreten Fällen gilt. Bei einem induktiven Beispiel ist erkennbar, inwiefern es verallgemeinert und auf andere Fälle übertragen werden kann. Da solche Beispiele in der mathematikdidaktischen Forschung als generische Beispiele (z.B. Bills et al. 2006) bezeichnet werden, daher behalte ich die Bezeichnung des generischen Beispiels bei.

Die konventionalisierten Schlussweisen beruhen auf Konventionen, die sich innerhalb einer Gruppe herausgebildet haben. Daher kann es keine vollständige Aufzählung dieser Schlussweisen geben. Als Beispiele nennt Ottmers den Autoritätsschluss, der eine Behauptung durch den Verweis auf eine andere Autorität begründet, oder den Analogieschluss, der eine Behauptung durch eine metaphorische Analogie herleitet. Da der Begriff Analogie in der Mathematik anders behaftet ist, bezeichne ich diesen Schluss als metaphorischen Schluss.

Wissenskonstruktion

In ihrer Theorie der interessendichten Situationen hat Bikner-Ahsbahs (2005) ein Modell zur Beschreibung kollektiver epistemischer Prozesse entwickelt. Dieses Modell besteht aus drei wesentlichen epistemischen

Handlungen: das Sammeln mathematischer Bedeutungen (Lösungen, Assoziationen, (Gegen-)Beispiele, Muster, Lösungswege, Feststellungen, usw.) bildet die Basis des Konstruktionsprozesses. Im Folgenden können diese mathematischen Bedeutungen auf vielfältige Weisen verknüpft werden, was zu Struktursehen führen kann. Unter Struktursicht wird nicht nur die Wahrnehmung von mathematischen Regelmäßigkeiten verstanden, sondern auch das Konkretisieren, Begründen und Überprüfen der Gesetzmäßigkeit.

3. Methodische und Methodologische Überlegungen

Diese Untersuchung ist in das Forschungsprojekt „Effective mathematical knowledge construction in interest-dense situations“[1] eingebettet, in dem Prozesse der mathematischen Wissenskonstruktion durch die Verknüpfung zweier Modelle genauer untersucht werden (siehe Bikner-Ahsbahs 2011). In diesem Projekt wurden drei Lernumgebungen zu verschiedenen Themen entwickelt, in denen die Möglichkeit und der Anlass zur Konstruktion neuen Wissens gegeben werden. In Deutschland und Israel sind 3, bzw. 4 leistungsstarke Schülerpaare der 10., bzw. 11. Klasse bei der Bearbeitung dieser drei Aufgaben videografiert worden. Für diese Untersuchung werden die Transkripte der Aufgabenbearbeitung der deutschen Schüler/Innen herangezogen. In interpretativen Turn-by-turn-Analysen wird im ersten Schritt der Erkenntnisprozess und im zweiten Schritt der Argumentationsprozess sowie die Schlussweisen rekonstruiert. Die Ergebnisse dieser Analysen werden in Verlaufsdiagrammen komprimiert dargestellt, die anschließend verglichen und kontrastiert werden können.

4. Erste Ergebnisse und Ausblick

In ersten Fallstudien (Cramer 2010, Cramer 2011) hat sich gezeigt, dass, offenbar unabhängig von den verwendeten Schlussweisen, zu Beginn von Argumentationsprozessen Argumentationsstränge mit einem hohen Anteil an Daten („Datendichte“) vorherrschen. Dies passt zu den Ergebnissen der interessendichten Situationen, dass Sammeln bis zu einem gewissen Sättigungsgrad notwendig ist für weitere Konstruktionsprozesse. Weitere Zusammenhänge zwischen Argumentations- und Wissenskonstruktionsprozessen lassen sich derzeit noch nicht erkennen. Bei lang andauernden und ineinander verschachtelten Argumentationen erscheint es notwendig, Handlungen wie z.B. Anzweifeln, Verneinen, explizites Einfordern, Wiederholen oder Präzisieren von Elementen der Argumentation in das Toulmin-Schema zu integrieren.

[1] Dieses Projekt wird von der German-Israeli Foundation for Scientific Research and Development gefördert (Grant 946-357.4/2006).

Bezüglich der Schlussweisen lässt sich für die bisherigen Analysen feststellen, dass die leistungsstarken Schüler/Innen in dieser Untersuchung kaum konventionalisierte Schlüsse nutzen. Insbesondere nutzen sie solche Schlussweisen nicht, wenn sie begründen wollen, wieso eine Behauptung gilt. Konventionalisierte Schlussweisen nutzen sie, um Vermutungen auszuformulieren. So wird bspw. ein Operator mit dem Sprichwort „Ausnahmen bestätigen die Regel" gerechtfertigt. Überwiegend nutzen die Schüler/Innen in dieser Untersuchung jedoch alltagslogische Schlüsse. In der Phase des Aufstellens von Vermutungen nutzen sie überwiegend beispielbasierende Schlüsse, in den Phasen des Begründens dagegen eher andere alltagslogische Schlussweisen. Die alltagslogischen Schlussweisen werden von den Schülern/Innen dabei offenbar als heuristische Strategien zum Verknüpfen von Daten für das Aufstellen von Vermutungen und für das Finden von Schlussregeln genutzt. Von mathematischen Argumentationen scheinen sie sich weniger in der Struktur als vielmehr in ihrer Strenge zu unterscheiden. Die alltagslogischen Schlussweisen könnten also ein Weg sein, um Argumentation zu entwickeln und allmählich auszuschärfen.

Literatur

Bills, L.; Dreyfus, T.; Mason, J.; Tsamir, P.; Watson, A. & Zaslavsky, O. (2006). Exemplification in mathematics education. In: Novotná, J.; Moraová, H.; Krátká, M. & Stehlíková, N. (Eds.). Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology in Mathematics Education, vol. 1. Prague: Charles University, Faculty of Education, 126 – 154.

Bikner-Ahsbahs, A. (2005). Mathematikinteresse zwischen Subjekt und Situation. Theorie interessendichter Situationen - Baustein für eine mathematikdidaktische Interessentheorie. Hildesheim: Franzbecker.

Bikner-Ahsbahs, A. (2011) [im Druck]. Epistemisch handeln können – aber wie? In: Beiträge zum Mathematikunterricht. Vorträge auf der 45. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik vom 21.-25.02.2011 in Freiburg.

Cramer, J. (2010). Induktion durch vollständiges Zeigen. Schlussweisen in Argumentationsprozessen. In: Beiträge zum Mathematikunterricht. Vorträge auf der 44. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik vom 08.-12.03.2010 in München, 229 – 232.

Cramer, J. (2011) [im Druck]. Everyday argumentation and knowledge construction in mathematical tasks. In: Proceedings of the 7th Conference of the European Society for Research in Mathematics Education. Rzeszów: University of Rzeszów, Departments of Mathematics and Natural Science.

Galbraith, P. L. (1981). Aspects of proving: A clinical investigation of process. In: Educational Studies in Mathematics, 12, 1 – 29.

Martin, G. & Harel, G. (1989). Proof frames of preservice elementary teachers. In: Journal for Research in Mathematics Education, 20(1), 41 – 45.

Ottmers, C. (2007). Rhetorik. Stuttgart: Metzler.