Willi DÖRFLER, Klagenfurt

Formen der Referenz in der Mathematik

Mathematischen Texten ist zweifelsfrei zu entnehmen, dass sie von ganz bestimmten Gegenständen oder Objekten und deren Eigenschaften handeln. Oder zumindest sind diese Texte so geschrieben, dass sie vorgeben derartige Gegenstände zu untersuchen, zum Beispiel dadurch, dass diese Gegenstände durch Substantive benannt werden. Zu diesen Gegenständen gehören alle Arten von Zahlen, (seit Cantor) endliche und unendliche Mengen (auch von mathematischen Objekten: Zahlenmengen), Funktionen, Relationen, algebraische Strukturen, geometrische Figuren, so genannte Räume aller Art, etc. Nach allgemeinem Verständnis sind diese mathematischen Objekte nicht direkt als solche, sondern nur als Referenten von Zeichen (Symbolen, Darstellungen) begreifbar und zu untersuchen. Dabei spare ich hier (auch aus Platzgründen) die philosophische Frage nach der Existenzform der mathematischen Objekte gänzlich aus, siehe aber dazu etwa Otte (2003), Krämer (1988, 1991). Für meine Fragestellung ist es weitgehend irrelevant, ob man Realist oder Fiktionalist hinsichtlich mathematischer Objekte ist, also ob man eine unabhängige Existenz mathematischer Gegenstände annimmt oder diese als Konstruktionen oder Erfindungen des menschlichen Denkens ansieht. Im ersten Fall ist Mathematik deskriptiv und die verwendeten Zeichen gewinnen ihre Bedeutung durch die Beschreibung der von ihnen unabhängigen Objekte. Im zweiten Fall sind die Zeichen selbständig und legen die Objekte fest („symbolische Konstitution" nach Krämer). Hier möchte ich untersuchen, wie in der Mathematik Zeichen und Zeichensysteme eine Referenz auf eben diese Objekte herstellen unabhängig von deren Existenzform. Referenz kann es ja auch auf fiktionale Objekte geben („Einhorn" als Beispiel). Im Gegensatz zu den mathematischen Objekten sind jedenfalls die verwendeten Zeichen innerhalb einer großen Vielfalt von Zeichen- und Notationssystemen als Inskriptionen (auf Papier oder in einem anderen Medium) wahrnehmbar und konkret manipulierbar (etwa durch Rechnen). Zumindest ist das Geschriebene oder Gedruckte die materielle Basis einer oft komplexen Praxis des Umgangs mit und der Verwendung von jeweiligen Zeichen nach mehr oder weniger expliziten Regeln. Zum Begriff „Inskription" siehe Roth und McGinn (1998).

Als theoretische Basis für meine Analyse verwende ich die Begriffe aus der Semiotik von Charles S. Peirce, (siehe dazu Hoffmann, 2005), insbesondere jedoch die Unterscheidung der Zeichentypen Diagramm, Index und Symbol (siehe auch Dörfler, 2006).

Eine Art der Bezugnahme auf (mathematische) Objekte, die ich nur der Vollständigkeit halber erwähne, erfolgt durch Namensgebung. Dazu zähle ich beispielsweise: deutsche Zahlwörter, „Eulersche Zahl“ oder kurz e, π, Exponentialfunktion, Ableitung, Integral, Banach-Raum, etc. Ihre wesentliche Funktion liegt in der Kommunikation über Mathematik und man kann auch sagen, dass diese Namen nicht zur Mathematik selbst gehören. Auch kommt ihnen eine Abkürzungsfunktion zu, indem sie oft für komplexe Formeln oder Definitionen stehen, die dann die eigentlichen Zeichen für die durch die Namen nur benannten mathematischen Objekte darstellen. Anders gewendet, ich interessiere mich primär für solche Zeichen in mathematischen Texten, an denen und mit denen Operationen ausgeführt werden, die zu Ergebnissen über Eigenschaften der bezeichneten mathematischen Objekte führen (können).

In mathematischen Texten lassen sich nun zwei ganz wesentlich verschiedene Arten von Zeichen für mathematische Objekte beobachten. Oder, man könnte auch sagen, die letzteren treten in den Texten in (zumindest diesen) zwei verschiedenen Formen auf. Eine nenne ich diagrammatische Referenz (d. R.) und die andere indexikalische Referenz (i. R.). Für erstere führe ich als erstes Beispiel die figurierten Zahlen an (etwa Dreieckszahlen), wo Zahlen als Punktmengen (oder Strichlisten) auftreten (aber nicht durch diese bloß veranschaulicht werden!). Diese Punktmengen sind im Sinne von Peirce Diagramme, deren Objekt die jeweilige Zahl ist (bei Pythagoras dürfte eher noch eine Identifizierung des Diagramms mit seinem Objekt gedacht worden sein). Eine indexikalische Referenz dagegen erfolgt etwa in der Formulierung des „Kleinen Fermat“: Ist $a \in \mathrm{N}$, p prim, $(a, p) = 1$, so ist $a^{p-1} \equiv 1(p)$. Hier sind a und p im Sinne von Peirce Indizes, die auf Zahlen verweisen. Diese Indizes (mit Variablencharakter) treten ihrerseits wiederum in Diagrammen auf (die Formeln im obigen Satz).

Ein wesentlicher Unterschied zwischen d. R. und i. R. ist somit, dass in ersterer die auf mathematische Objekte verweisenden Diagramme (Zeichen) selbst eine innere Struktur haben, die bei allen Operationen mit ihnen ganz wesentlich benützt wird (beim Addieren; in Beweisen etwa von Sätzen über „gerade“ und „ungerade“). Bei d. R. werden den Zeichen selbst Eigenschaften zugeschrieben bzw. werden mit ihnen dann Eigenschaften der referenzierten Objekte (hier die Zahlen) festgelegt. Nach Peirce konstituieren die Diagramme in dieser d. R. eine Sichtweise auf das (sonst unbekannte) Objekt. Das unterscheidet auch diesen semiotischen Zugang von der Begrifflichkeit der „Darstellungen“, bei denen (implizit wenigstens) ein schon strukturiertes Objekt seine möglichen Diagramme bestimmt. Da man bei der d. R. von einer strukturellen oder relationalen Ähnlichkeit oder sogar Isomorphie zum referenzierten Objekt ausgeht (zumindest metaphorisch), ist das Operieren mit den Diagrammen gleichsam ein direktes Operieren mit mathematischen Objekten. In diesem semiotischen Sinne sind dann die Diagramme die Objekte, oder etwas differenzierter, sie sind Prototypen der referenzierten Objekte. Die d. R. der jeweiligen Zeichen/ Diagramme ist dabei konstitutiver und konstituierter Bestandteil und/oder Funktion einer umfassenden (sozialen) Praxis des Handelns mit den Zeichen („Strichlistenpraxis"); d. h. die d. R. „gibt" es nur innerhalb dieser Praxis, sie ist keine absolute Eigenschaft etwa der Punktmengen/ Strichlisten. Zu dieser Praxis gehört dann das Rechnen mit den Zeichen, aber auch die „Anwendung" beim Zählen sowie Beweise mit figurierten Zahlen. In dieser Praxis gibt es dann auch die Rede von beliebig langen Strichlisten (Punktmengen), angedeutet durch die notorischen drei Punkte. Deren Eigenschaften und Operationen werden analog zu den überblickbaren („kleinen") Diagrammen vorgestellt (oder postuliert oder vereinbart). Man könnte hier auch schon den ersten Hinweis auf Fiktionalität in der Mathematik sehen.

Im Falle der i. R. hat nun das Zeichen, also der Index keine (mathematisch relevante) innere Struktur und die Indexfunktion des Zeichens muss vereinbart oder angekündigt werden: Sei n eine natürliche Zahl, sei x eine reelle Zahl, usf.. Hilbert (in Hilbert und Bernays (1936)) beschreibt einen Übergang von d. R. zu i. R., wobei die Indizes dann in Formeln (etwa Assoziativgesetz) auftreten, die „Rechenregeln" allgemein formulieren. Und diese Rechenregeln sind es dann auch, die das Operieren mit den Indizes regeln. Die Indizes bzw. die durch sie indizierten mathematischen Objekte sind hier also durch ein formales Regelsystem konstituiert, wie das typischerweise durch Algebraisierung und Axiomatisierung erfolgt. Ich halte dies für einen großen Kontrast zur d. R.: Diagramme beschränken gewissermaßen durch ihre Struktur die möglichen und sinnvollen Handlungen mit ihnen, die Regeln sind zwar oft implizit, aber „anschaulich". Ein Index beinhaltet zunächst keinen Hinweis, was mit ihm getan werden kann oder soll, prinzipiell ist „alles" möglich (deswegen die vielen Schülerfehler in der Algebra?). Er erhält seine Rolle oder Referenz erst durch das auf ihn anzuwendende (Rechen-)Regelsystem. Dies unterscheidet die semiotische Sicht mit Indizes vom Standpunkt der „Variablen". Für Funktionszeichen wie f, g wird das in Dörfler (2010) an Beispielen untersucht. Wichtig ist aber, dass Indizes nicht isoliert auftreten, sondern stets eingebunden als „Bauteile" von Diagrammen, die Relationen zwischen den Indizes festlegen (auch wieder nach vereinbarten Regeln); etwa f, g in den typischen Ungleichungen der Analysis.

Weitere Beispiele für diagrammatische Referenz: Dezimalzahlen, Brüche, komplexe Zahlen $a + \mathrm{i}b$ (mit a, b als Indizes auf reelle Zahlen), Matrizen, Funktionsterme einschließlich unendliche Reihen, Funktionsgraph, geometrische Figuren. Zu jedem Beispiel gehört eine komplexe Praxis, in die die d. R. eingebettet ist. Und in allen Fällen gibt es eine dazu korrespondierende Praxis mit i. R., wo die Referenz der Indizes durch Regeln aus der diagrammatischen Praxis festgelegt wird (sei z eine komplexe Zahl, sei A eine Matrix); vgl. Dörfler (2007) zu den Matrizen.

Beide Formen der Referenz kommen schon in der Schule vor, auch wenn die i. R. dann in der höheren Mathematik dominiert. Jedenfalls ist es sinnvoll, die genannten Unterschiede bewusst zu machen, weil den beiden Referenzformen sehr unterschiedliche Auffassungen von mathematischen Objekten entsprechen. In der Arithmetik treten die (natürlichen) Zahlen letztlich immer in d. R. auf (Dezimalzahlen, Punktmengen, Strichlisten, etc.) und das Rechnen benutzt ganz wesentlich die innere Struktur dieser Diagramme. Demgegenüber findet sich in der Algebra typischerweise fast ausschließlich eine i. R. (auf Zahlen überhaupt). Dieser Wechsel geht dann so weit, dass die Indizes (Buchstaben) selbst zu „Rechenobjekten“ werden (ohne Referenz), deren Rolle durch Rechenregeln festgelegt wird. Vor diesem Hintergrund sind die massiven Lernprobleme des Übergangs von der Arithmetik zur Algebra nicht verwunderlich (vgl. dazu Filloy u. a., 2008).

Literatur

Dörfler, W. (2006): Diagramme und Mathematikunterricht. In: JMD, 27, 200 - 219.

Dörfler, W (2007): Matrizenrechnung: Denken als symbolisches Handwerk. In B. Barzel & al. (Hrsg.): Algebraisches Denken. Festschrift für L. Hefendehl-Hebeker. Hildesheim: Franzbecker, 53-60.

Dörfler, W. (2010): Mathematische Objekte als Indizes in Diagrammen. Funktionen in der Analysis. In G. Kadunz (Hrsg.): Sprache und Zeichen. Hildesheim und Berlin: Franzbecker, 25-48.

Filloy, E., Puig, L. und T. Rojano (2008): Educational Algebra. Mathematics Education Library. New York: Springer.

Hilbert, D. und P. Bernays (1936): Grundlagen der Mathematik I. Berlin: Springer.

Hoffmann, M. (2005): Erkenntnisentwicklung. Philosophische Abhandlungen, Band 90. Frankfurt am Main: Klostermann.

Krämer, S. (1988): Symbolische Maschinen. Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft.

Krämer, S. (1991): Berechenbare Vernunft. Berlin und New York: de Gruyter.

Otte, M. (2003): Does Mathematics have Objects? In What Sense? In: Synthese, 134, 181 - 216.

Roth, W.-M. und M. K. McGinn (1998): Inscriptions: Toward a Theory of Representing as Social Practice. In: Review of Educational Research, 68/1, 35 - 59.