

Joachim ENGEL, Ludwigsburg

Über ikonische Repräsentationen von zufallsbedingter Variabilität

1. Statistisches Denken und Zufallsvariabilität

Messungen von Objekten – selbst wenn unter den gleichen Bedingungen wiederholt dasselbe gemessen wurde – unterscheiden sich. Der wohl wichtigste Grund für die Bedeutung und Nützlichkeit von Statistik ist die bunte Vielfalt und der Mangel an Uniformität von Eigenschaften aller Geschöpfe und Objekte dieser Welt. Menschliche Wesen unterscheiden sich, z.B. hinsichtlich ihrer Körpergröße, Gewicht, IQ, Einstellungen etc. Selbst in der Fabrik hergestellte Gegenstände wie 35mm lange Nägel unterscheiden sich in ihrer Länge! Statistisches Denken bezieht sich auf das Lernen und das Entscheidungen-Treffen unter Unsicherheit. Der größte Teil der Ungewissheit rührt von der Allgegenwart von Variabilität (Wild, Pfannkuch, 1999). Jede ernsthafte Diskussion statistischen Denkens muss daher die Rolle der Variabilität in Daten diskutieren (Watson & Callingham, 2003). Der Umgang mit statistischer Variabilität ist neben dem eher algorithmischen Umgang stark von individuellen Sichtweisen und Überzeugungen geprägt. Engel und Sedlmeier (2005) fanden heraus, dass Lernende oft an Grundüberzeugungen eines deterministisch geprägten Weltbilds festhalten, das der Entwicklung eines Verständnisses für zufällige Variabilität oft im Wege steht. Lernende bevorzugen oft sehr reguläre deterministische Muster in Verteilungen selbst wenn ein eher unregelmäßiges Ergebnis wahrscheinlicher ist. Wenn Lernende in solch deterministisch geprägten Ansichten verharren, dann wird man eher Schwierigkeiten erwarten, wenn sie mentale Modelle konstruieren sollen, die mit statistischer Variabilität in Verbindung stehen.

2. Forschungsfrage:

Vor dem Hintergrund der Bedeutung von Variabilität fassen wir hier einige Ergebnisse aus Untersuchungen (Engel, 2011; Engel & Sedlmeier, 2005; Kuntze et al., 2010; Wunsch, 2009) exemplarisch zusammen, bei denen folgende Fragen im Vordergrund standen. Für Details muss auf die angegebene Literatur verwiesen werden

- Wie stellen Probanden (Kinder, Schüler, Studierende) Variabilität von zufallsbedingten Ereignissen dar?
- Welche Rolle spielt dabei das Format, mit dem zufallsbedingte Variabilität repräsentiert wird?

3. Methode

Verschiedenen Gruppen von Versuchspersonen wurden mehrere Items vorgelegt, bei denen sie aufgefordert waren, ihre Intuitionen bezüglich zufälliger Vorgänge darzustellen. Der Typ der Fragestellungen ließ nicht eine Bewertung der Antworten gemäß den Kategorien richtig/ falsch zu, sondern die Antworten sind eher als Ausdruck von Überzeugungen anzusehen, wie stark das Denken der Probanden von deterministischen Überzeugungen geprägt ist. Wir können hier nur ein Item zur Diskussion stellen. Für weitere Diskussionen wird auf die genannten Publikationen verwiesen.

Beispiel 1: Männer mit Hut:



Die Aufgabe verlangt eine Kennzeichnung zufälliger Elemente (hier das Einzeichnen von Hüten) in einer diskreten, linearen Anordnung. Strukturell kann die Aufgabe, eine ausgedachte Münzwurfreihe der Länge 18 zu notieren als äquivalent angesehen werden, wobei eine Münze, die mit $1/3$ Wahrscheinlichkeit „Kopf“ und mit $2/3$ Wahrscheinlichkeit Zahl produziert, eingesetzt wurde. Andere Aufgaben in den oben zitierten Untersuchungen präsentierten ähnliche Situationen, entweder in anderen Kontexten oder in anderen Formaten (diskret planar, stetig planar).

4. Resultate

Beim Betrachten der Antworten von 265 Schülerinnen und Schülern von Neunten Klassen sind zwei verschiedene Vorgehensweisen zu erkennen. Eine Gruppe von Schülern, die „Deterministen“, zeichnet ein sehr regelmäßiges Muster ein, so setzen sie beispielsweise genau jedem dritten Männchen in der Reihe einen Hut auf. Andere Schüler wiederum versuchen gerade ein derartiges Muster zu vermeiden, indem sie die Hüte eher unregelmäßig auf die Strichmännchen verteilen. Zur genaueren Analyse wurden die Antworten in fünf Gruppen kategorisiert:

Strenger Determinist: Immer das erste, zweite oder dritte Männchen in einer Gruppe trägt einen Hut.

Gemäßigter Determinist: Die Hüte sind in einer anderen, aber regelmäßigen Anordnung verteilt (beispielsweise in der ersten Gruppe trägt das erste Männchen einen Hut, in der zweiten der zweite etc.).

Anfänger: In jeder Dreiergruppe trägt ein Männchen einen Hut, aber ohne erkennbares Muster.

Könnner: Die Gesamtzahl der Hüte entspricht dem Durchschnitt, doch nicht in jeder Dreiergruppe trägt ein Männchen einen Hut.

Experte: Die Gesamtzahl der Hüte weicht vom Durchschnitt nach oben oder nach unten ab.

	Anzahl der Schüler	Anteil in Prozent
Strenger Determinist	197	74,3 %
Gemäßigter Determinist	3	1,1 %
Anfänger	26	9,8 %
Könnner	26	9,8 %
Experte	10	3,8 %
Nicht auswertbar	3	1,1 %
Gesamtzahl der Schüler	265	100 %

Tab. 1: Klassifizierung der Schülerantworten

Tabelle 1 zeigt die Klassifizierung der Schülerantworten. Es fällt auf, dass ein Großteil der Schüler (74 %) eine streng deterministische Vorgehensweise verfolgte. Nur 36 Schüler haben unregelmäßige Muster eingezeichnet und nur zehn der 265 Schüler haben eine von der Durchschnittszahl sechs abweichende Anzahl von Hüten eingezeichnet. Anstatt diesen Schülern einen Rechenfehler zu unterstellen, würdigten wir ihre Darstellung als eine Anerkennung der Unterscheidung zwischen Stichprobe (18 Männer im Bild) und umfassenderer Grundgesamtheit, auf die die Kennzeichnung von 1/3 Hutträger zutrifft.

5. Zusammenfassung:

- Die Schüler tendieren sehr stark zu deterministischem Denken
- Über die Frage, inwieweit der Kontext der Aufgaben die Antworten der Schüler beeinflusste, kann man nur Vermutungen äußern
- Möglicher Zusammenhang mit der Art, wie Schüler in der Schule zu denken gelehrt werden
 - o Zufall und Variabilität werden in den seltensten Fällen beim Erklären von Beobachtungen und Erscheinungen in der Natur, von Versuchsergebnissen oder beim Auswerten von Statistiken diskutiert.

- So ist es auch nicht verwunderlich, wenn die Schüler beim Erstellen von typischen Verteilungen strikt nach ihrer kausalen Denkweise vorgehen und den Einfluss des Zufalls nicht mit in Betracht ziehen.
- Dieses begründende Denken ist besonders im Mathematikunterricht verankert; die Schüler haben gelernt, dass es für alles eine rationale, und das heißt für viele auch eine deterministische und kausale Begründung gibt.

Das abschließende Zitat von Ephraim Fischbein (1975) fasst diese Überlegungen präzise zusammen:

The child is taught [in school] that explanation consists in specifying a cause; that a scientific prediction must be a certainty; that ambiguity and uncertainty are not acceptable in scientific reasoning and so on. Even if all this is not explicitly stated, it is implied in all that is taught in school.

Literatur

- Engel, J. (2011): Der Fehlschluss des Spielers: Ist das vierte Kind ein Junge? In: Praxis der Mathematik in der Schule (eingereicht).
- Engel, J. & Sedlmeier, P. (2005): On middle-school students' comprehension of randomness and chance variability in data. In: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 37 (3), 168-179.
- Fischbein, E. (1975): The Intuitive Sources of Probabilistic Thinking in Children. Reidel: Dordrecht-Holland.
- Kuntze, S., Engel, J., Gundlach, M. & Martignon, L. (2010): Aspects of statistical literacy between competency measures and indicators for conceptual knowledge – empirical research in the project “RIKO-STAT”. Proceedings of 8th International Conference of Teaching Statistics, Ljubljana, Slovenia. Online: www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications.
- Wild, C. & Pfannkuch, M. (1999): Statistical thinking in empirical enquiry. In: International Statistical Review, 3, 223-266.
- Watson, J., & Callingham, R. (2003). Statistical literacy: A complex hierarchical construct. In: Statistics Education Research Journal, 2 (2), 3-46.
- Wünsch, M. (2009): Zufall und Variabilität in statistischen Daten: Grundvorstellungen und Kompetenzen von Realschülern. Wissenschaftliche Hausarbeit. Pädagogische Hochschule Ludwigsburg.