

Christian FAHSE, Landau

Sonden - eine Möglichkeit für die empirische Unterrichtsforschung? – Das Beispiel Division durch Null

Sonden werden in der Astronomie, Medizin oder Verfahrenstechnik mit dem Ziel eingesetzt, durch eine detaillierte Erkundung eines kleinen Bereichs umfassende Aussagen über einen größeren Zusammenhang zu ermöglichen. Dies gelingt, indem lokal sehr spezifische Daten gesammelt werden, die indirekt die gewünschten Informationen liefern. Fasst man den Begriff der Sonde etwas weiter, dann findet man diese auch im Alltag. Kraftfahrzeugversicherungen nutzen zur Festlegung der Beitragshöhe unter anderem folgende Frage als Sonde: Steht der Wagen regelmäßig in einer Garage? Von Interesse ist dabei nicht der kausale Zusammenhang zwischen der Antwort auf diese Frage und dem Unfallrisiko, sondern allein die Tatsache, dass eine gesicherte Korrelation zwischen diesen beiden Größen besteht.

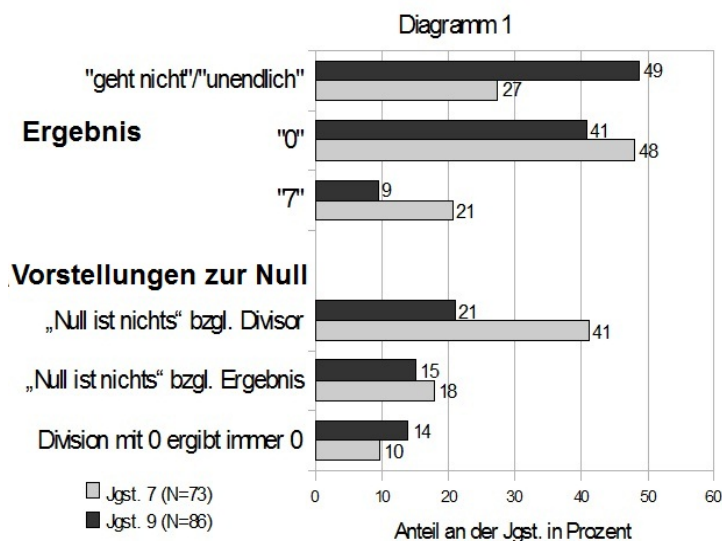
Im Hinblick auf die empirische Unterrichtsforschung könnte man in einem ersten Anlauf formulieren: Sonden sind die Garagenfragen für den Unterricht. Um zu klären, ob die Metapher der Sonde Anregungen für die empirische Unterrichtsforschung geben kann, wird zunächst mit dem Beispiel der Division durch Null ein noch unvollkommener Prototyp einer Sonde betrachtet. Im Folgenden werden erste Ergebnisse einer laufenden empirischen Untersuchung zu dieser Fragestellung referiert. Im Anschluss daran wird reflektiert, welche Aspekte der Untersuchung es rechtfertigen, von einer Sonde zu sprechen und wo noch weitere Entwicklungsarbeit notwendig ist. Infolge der noch nicht abgeschlossenen Auswertung sind alle Ergebnisse als vorläufig zu betrachten.

Die Aufgabe 7:0

Mit Hilfe von Fragebögen wurden 73 bzw. 86 Schüler/innen der Jahrgangsstufen 7 und 9 eines rheinland-pfälzischen Gymnasiums aufgefordert, das Ergebnis der Aufgabe 7:0 anzugeben und ihre Aussage zu begründen. Daneben wurden u. A. Aussagen zur Eigenständigkeit ihrer Überlegungen, zur Erinnerung an den Unterricht zu dieser Thematik und zur Selbsteinschätzung ihrer mathematischen Leistungsstärke erhoben.

Schülerangaben zum Ergebnis der Aufgabe „7:0 = ?“

Als ein Ergebnis der Studie lässt sich festhalten (vgl. Diagramm 1), dass bei der Frage zum Ergebnis der Aufgabe „7:0 = ?“ die relative Häufigkeit der Antworten „geht nicht“ bzw. „unendlich“ im Laufe der Schulzeit zwar zunimmt, aber selbst in der 9. Jahrgangsstufe noch unter 50% bleibt.



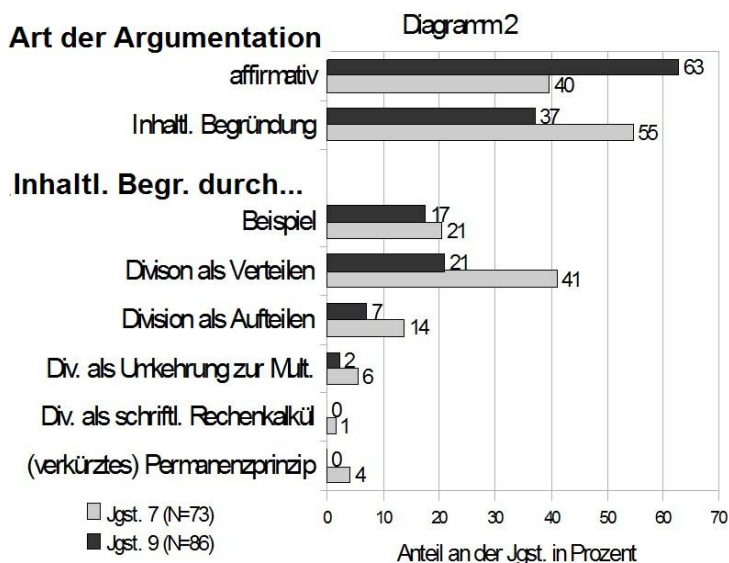
Der Anteil der Antworten „0“ und „7“ ist auch nach der Orientierungsstufe noch sehr hoch. Er wird verursacht durch die Vorstellung „Null ist Nichts“ einerseits bezüglich des Divisors („es wird nicht geteilt“) und andererseits bezüglich des Ergebnisses („es geht nicht“ ist 0“) sowie vermeintlichen formalen Argumenten

wie „Division mit 0 ergibt immer 0“ oder rein affirmativer Argumentation (z. B. „so gelernt“), wie die Analyse der gelieferten Begründungen zeigt.

Art der Argumentation bei „7:0 =?“

Die Untersuchung zielt vorrangig auf die Vorstellungen der Schülerinnen und Schüler zum Begründen ab. Etwa die Hälfte hält Affirmation („es ist so, weil wir es so gelernt haben“) für eine Begründung (vgl. Diagramm 2). Die andere Hälfte begründet inhaltlich, unter ihnen haben allerdings weniger als 20 Prozentpunkte ein richtiges Ergebnis. „Inhaltlich“ begründet wird häufig anhand eines Beispiels („7 Äpfel durch 0 Personen teilen“) und über die Sicht der Division als Verteilen oder als Aufteilen/Messen („Hineinpassen“). Selten vorkommend, aber nachweisbar sind inhaltliche Argumentationen über die Division als Umkehrung der Multiplikation („Probe“), über die Division als Kalkül (schriftliche Rechenverfahren, die auf Konstrukte wie „ $0,\bar{0}$ “ führen) oder über ein verkürztes Permanenzprinzip bzw. eine indirekte Argumentation („7:0 kann nicht 7 sein, da 7:1 bereits 7 ergibt“).

Der hohe Anteil an Begründungen mittels Handlungsvorstellungen über das (als unmöglich angesehene) Verteilen, kann zu allen drei Ergebnissen führen: Die Unmöglichkeit kann korrekt in „geht nicht“ umgesetzt werden oder in „0“, wenn Null als gleichbedeutend für „kein Ergebnis“ angenommen wird. Gerade in Jgst. 7 wird häufig „es wird nicht geteilt, also bleiben 7 übrig“ geschlossen. Dieser sehr anschauliche Gedankengang tritt in der Jgst. 9 zurück und findet sich in der ebenfalls untersuchten 13. Jgst. gar nicht mehr. Gängige mathematische Begründungen über den Widerspruch durch Probe kommen vereinzelt vor, spielen insgesamt aber kaum eine Rolle.



Es zeigt sich, dass alle für die Primarstufe etwa von Hefendehl-Hebeker (1982) und Padberg (2005) beschriebenen Begründungen und Fehlvorstellungen auch bei Gymnasiasten anzutreffen sind. Zumindest in dieser Erhebung ist auch auf der Sekundarstufe die Vermischung von operationalen („es wird nicht geteilt“, „es kommt

nichts heraus“) und kardinalen Aspekten der Zahl 0 dominant, vergleichbar etwa dem Übergang in der Auffassung des Gleichheitszeichens von der handlungsbezogenen Vorstufe „ergibt“ zur Gleichwertigkeit von Termen (zu dieser Thematik siehe auch Borromeo Ferri/Blum (2011)).

Erinnerungen an den Unterricht zum Thema „Division durch Null“

An einen Unterricht zum Thema „Division durch Null“ erinnern sich in der 7. Jahrgangsstufe nur ca. 37% und in der 9. Jahrgangsstufe ca. 26% der befragten Schülerinnen und Schüler. Von diesen geben aber über 80% in Jgst. 7 bzw. 45% in Jgst. 9 eine falsche Antwort auf die Frage „ $7:0 = ?$ “. Erinnert werden offensichtlich eher Prozesse als Unterrichtsergebnisse. Nur einzelne führen ihre richtige Begründung auf den Unterricht zurück, ohnehin gibt ein sehr hoher Anteil aller Schülerinnen und Schüler an, die Begründung selbstständig überlegt zu haben (49% in Jgst. 7 und 29% in Jgst. 9). Dies spricht dafür, dass im Unterricht – zumindest der hier untersuchten Schule – im Laufe der Zeit zwar die Unmöglichkeit der Division durch Null als Faktum wiederholt, aber nicht begründet wird.

Auffallend ist die Bedeutung der Grundschule bei diesem Thema. Etwa ein Zehntel der Schülerinnen und Schüler der 9. Jgst. erwähnte die Grundschule, ohne explizit nach ihr gefragt worden zu sein. 53% der explizit nach ihr gefragten Schülerinnen und Schüler der 7. Jgst. führten ihre Kenntnis des Ergebnisses auf sie zurück.

Ist die Aufgabe „ $7:0 = ?$ “ eine Sonde? – Wie geht es weiter?

Die untersuchten Klassen zeigen sehr unterschiedliche Muster hinsichtlich der Bearbeitung des Fragebogens. Dies gilt für die bevorzugten Lösungen der Aufgabe „ $7:0 = ?$ “, aber noch deutlicher und interessanter für die Art

der Begründung. In 8 Lerngruppen schwankte der Anteil der inhaltlich Begründenden zwischen 4% und 75%, eine affirmative Auffassung vom Begründen zwischen 15% und 89%. Hier setzt die Möglichkeit an, diese Untersuchung als Sonde aufzufassen. Die Unterschiede zwischen den Klassen bei der speziellen Aufgabe „ $7:0 = ?$ “ könnten Hinweise auf einen verschiedenen Stand der Kompetenzentwicklung, z. B. im Hinblick auf das mathematische Argumentieren geben. Zentral könnte hierbei die Art der Begründung sein, wobei z. B. die Leistungsstärken herauszurechnen wären. Wichtig bei der Auswertung einer Sonde ist, dass nicht einzelne Items betrachtet werden, sondern die Muster, die sich in der Kombination verschiedener Items finden. Dies wird an folgendem Beispiel deutlich: Wenn in einer Klasse die Unmöglichkeit der Division im aktuellen Unterricht sehr betont wurde, entfällt das Ergebnis „7“, das allerdings relativ leicht inhaltlich begründet werden kann. Solche Verzerrungen müssen herausgerechnet werden. Das Ziel ist also, Bewertungen für die Muster in einer Gesamtheit von Items zu finden.

Nach solch einer „Entwicklungsphase“ einer Sonde ist deren Validität in einer „Kalibrierungsphase“ zu klären: Die Sonde wird in Lerngruppen eingesetzt, deren Stand der Kompetenzentwicklung durch ausgedehnte Untersuchungen, ggf. auch Hospitationen bekannt ist.

Falls der hier angedeutete Prozess erfolgreich durchlaufen wird, könnte eine Sonde mit wenig Aufwand durch ihre selektive Sicht (**Minimalität**) dennoch zu validen Informationen über den Kompetenzstand in einer Lerngruppe kommen. Dieser Spagat, der die **Effektivität** der Sonde ausmacht, kann dadurch gelingen, dass lediglich **indirekt** Schlüsse aus **Mustern** in den **vielfältigen** Einzelbeobachtungen gezogen werden. Der Focus beim Begriff der Sonde liegt darauf, dass man auf einen offensichtlichen kausalen Zusammenhang der Items zum Ziel der Untersuchung verzichtet und stattdessen die Korrelationen sichert. Dies könnte gleichzeitig ökonomischer und genauer sein. Als leicht einzusetzendes begleitendes Werkzeug könnten Sonden in anderen Untersuchungen oder als Diagnoseinstrument für die Lehrkraft nützlich sein.

Literatur

- Hefendehl-Hebeker, L. (1982): Die Zahl Null im Bewußtsein von Schülern. Eine Fallstudie. In: Journal für Mathematik-Didaktik, Jahrgang 3, Heft 1, S. 47-65.
- Padberg, F. (2005): Didaktik der Arithmetik. Heidelberg: Spektrum Akad. Verlag.
- Borromeo Ferri, R./Blum, W. (2011): Vorstellungen von Lernenden bei der Verwendung des Gleichheitszeichens an der Schnittstelle von Primar- und Sekundarstufe. Erscheint im vorliegenden Tagungsband.