Astrid FISCHER, Oldenburg

Von der Hochschule zurück in die Schule: Wie bereitet das Mathematikstudium auf mathematische Anforderungen an Mathematiklehrerinnen und –lehrer vor?

In ihrem Mathematikstudium hören angehende Gymnasiallehrerinnen und –lehrer viele Veranstaltungen zu höherer Mathematik. Weder inhaltliche noch prozessbezogene Kompetenzen, die sie später ihre Schülerinnen und Schüler lehren sollen, erhalten in diesem Studium einen großen Raum. Bereitet das Studium sie dennoch gut auf die mathematischen Anforderungen vor, denen sie sich später in ihrem Beruf stellen müssen?

In dem Beitrag werden Ergebnisse einer Studie vorgestellt, in der Mathematikstudentinnen und -studenten eine elementaralgebraische Aufgabe bearbeiten, die in der Sekundarstufe I im Mathematikunterricht gestellt werden könnte. Die Studie geht der Frage nach, welche mathematischen Aktivitäten die Probanden einsetzen, um die Aufgabe zu lösen, und welche Hinweise diese Aktivitäten auf ihre mathematischen Kompetenzen geben.

1. Anforderungen an Mathematiklehrerinnen und -lehrer

Die COACTIV-Studie weist nach, dass mathematisches Fachwissen von Lehrerinnen und Lehrern eine entscheidende Komponente für das erfolgreiche Mathematiklernen ihrer Schüler darstellt (vgl. Jordan u.a. 2008). Mit den Bildungsstandards (KMK 2003) und Vorgaben zur Lehrerbildung (KMK 2008) werden zudem Anforderungen an Mathematiklehrerinnen und –lehrern formuliert, für die Wissen und Verstehen von mathematischen Inhalten und Prozeduren allein nicht qualifiziert: Wenn Lehrer ihre Schüler prozessbezogene mathematische Kompetenzen lehren sollen, müssen sie selbst diese Kompetenzen besitzen. Und wenn Lehrer die individuellen Vorstellungen und Denkwege ihrer Schüler diagnostizieren und daran individuell passende Aufgaben anschließen sollen, brauchen sie Erfahrungen mit Zugängen zu mathematischen Fragestellungen, die unterschiedliche Denkansätze und Niveaus erfassen (vgl. Sjuts 2006). Eine Grundlage für solche fachdidaktischen Reflexionen bilden mathematisches Fachwissen und elementare Kompetenzen in mathematischem Denken.

2. Rahmenbedingungen der Untersuchung

Die Probanden der Untersuchung waren die 17 Teilnehmer an einem mathematikdidaktischen Seminar, das für das erste Semester im Masterstudiengang für angehende Gymnasiallehrer vorgesehen ist. Sie richtet sich somit an Studierende, die ein Zwei-Fächer-Bachelorstudium mit dem Fach

Mathematik erfolgreich durchlaufen haben, und auf deren mathematische Expertise im Masterstudiengang fachdidaktische Veranstaltungen aufbauen sollen.

Zu Beginn des Seminars erhielten die Studierenden einen Arbeitsauftrag, den sie in schriftlicher Form und in Einzelarbeit ausführen sollten, und für den sie 25 Minuten Zeit hatten. Die meisten von ihnen hatten ihre Arbeit jedoch nach spätestens 20 Minuten beendet. Der Arbeitsauftrag bettet eine elementaralgebraische Aufgabe in einen Unterrichtskontext ein, in der der Proband oder die Probandin die Rolle einer Lehrperson einnimmt, die das Lernpotential einer mathematischen Aufgabe einschätzt. Der Auftrag lautet:

Aufgabe für Klasse 8:

a, b, c sind natürliche Zahlen, für die folgende Beziehung gilt: $3a = 2b+6c$
Was kannst du daraus schließen über die Teiler von a, von b und von c?

Auftrag:

1. Lösen Sie die Schüleraufgabe. Bitte dokumentieren Sie nicht nur Ihre fertige Lösung, sondern auch Ihre anderen Überlegungen.

2. Welche anderen Lösungsstrategien fallen Ihnen ein, die Schüler wählen könnten?

3. Wie beurteilen Sie den Schwierigkeitsgrad der Aufgabe? Würden Sie die Aufgabe in Klasse 8 stellen?

3. Analyse der mathematischen Aufgabe

Das Inhaltswissen, das zur Lösung der Aufgabe erforderlich ist, ist einfach: der Teilerbegriff, die natürlichen Zahlen und der Variablenbegriff. Das Finden eines Lösungswegs wird zudem dadurch erleichtert, dass sehr unterschiedliche Ansätze zum Ziel führen, es also nicht darauf ankommt, eine ganz bestimmte originelle Idee zu finden. Herausfordernd ist an der Aufgabe die Tatsache, dass zwei Inhaltsbereiche, die in der Schule üblicherweise nicht mit einander verbunden gelernt werden, in dieser Aufgabe mit einander verwoben sind, so dass zu erwarten ist, dass den Studierenden – zumindest aus ihrer Schulerfahrung – kein Standardlösungsweg für die Aufgabe bekannt ist. Herausfordernd ist auch die Notwendigkeit, einen Gedankengang zu führen, der mehrere unterschiedliche Problemlöse- bzw. Argumentationsschritte beinhaltet. (Zur Erläuterung dieser Merkmale siehe auch die Klassifikation von Aufgaben in Jordan u.a. (2006)). Zudem kann die Aufgabe auf unterschiedlichen Niveaus bearbeitet werden, so dass sie sowohl für starke als auch für schwache Problemlöser eine angemessene Herausforderung bietet.

Eine Lösung der Aufgabe kann wie folgt aussehen:

$3a = 2b+6c = 2(b+3c)$. Also ist $3a$ durch 2 teilbar (denn $b+3c$ ist eine natürliche Zahl). Nun ist ein Produkt nur dann durch 2 teilbar, wenn einer der Faktoren durch 2 teilbar ist, also ist a durch 2 teilbar. Entsprechend kann man für b schließen: $2b = 3a-6c = 3(a-2c)$. Also ist $2b$ und damit b durch 3 teilbar. Für c ist eine analoge Überlegung nicht möglich. Hier stellt sich die Frage: Gibt es für c keine Teilerbedingung? Und ebenso: Ist es möglich, dass a oder b sogar noch schärfere Teilerbedingungen erfüllen müssen? Eine Antwort kann man aufgrund von Gegenbeispielen geben: Wenn $a=2$ und $b=3$ gewählt wird, dann wird die Gleichung mit $c=0$ erfüllt. Ebenso: Wenn $c=1$ und $b=3$, dann ist die Gleichung mit $a=4$ erfüllt. Das Fazit ist also: Die einzigen Teilerbedingungen, die die Gleichung stellt, sind $2|a$ und $3|b$.

4. Überblick über die Bearbeitungen

Von den 17 Probanden der Studie haben acht die Teilerbedingungen $2|a$ und $3|b$ mit einer richtigen Schlusskette begründet, einer nur die Bedingung $2|a$. Zwei weitere Probanden haben die beiden Bedingungen zwar korrekt angegeben, aber mit einer fehlerhaften Begründung.

Auch unter denen, die die Teilerbedingungen gefunden haben, gibt niemand einen Hinweis darauf, dass er oder sie reflektiert, ob die gefundenen Bedingungen die einzigen sind, die die Variablen erfüllen müssen. Möglicherweise sehen einige das Problem (ohne es explizit anzusprechen), aber keinen Weg, wie sie diese Frage untersuchen können. Andere erkennen vielleicht gar nicht die Relevanz dieser Fragestellung.

Insgesamt sind bei der Probandengruppe Schwachstellen im Problemlösen und Begründen ganz unterschiedlicher Art zu beobachten. Sie werden im Folgenden benannt, ohne auf die Häufigkeit des Auftretens einzugehen:

(a) Mathematisches Wissen: Manchen Probanden fehlt ein gutes Verständnis des Teilerbegriffs. Das zeigt sich z.B., wenn eine Bruchzahl als Teiler einer Zahl bezeichnet wird. Zudem treten Fehldeutungen der Variablenterme auf.

(b) Problemlöseaktivitäten: Einigen Probanden gelingt es nicht, die beiden Inhaltsbereiche „Teiler“ und „algebraische Gleichung“ mit einander in Beziehung zu setzen. Die Strategie, aus Beispielen Hypothesen zu gewinnen, ist nicht verbreitet. Ein einziger Proband erzeugt Beispiele die vielleicht dieser Absicht dienen. Auch solche Probanden, die keine direkten Schlussfolgerungen über Teiler aus der Gleichung ableiten können, wählen nicht die Strategie, Beispiele zu erzeugen, etwa um sich einen Überblick zu verschaffen oder um die Beispiele auf Teilereigenschaften hin zu analysieren. Eine weitere Auffälligkeit bei den Bearbeitungen ist, dass einige Probanden geeignete Beobachtungen machen, diese jedoch nicht über mehrere Problemlöse- bzw. Argumentationsschritte hinweg weiterführen.

(c) Präsentation einer Begründung: Viele Probanden notieren ihre Überlegungen quasi für sich selbst, ohne ihre Ideen für einen Leser explizit zu machen. Dieser ist darauf angewiesen, Gedankengänge aus impliziten Signalen zu rekonstruieren. Von diesen Autoren wird z.B. nicht ausgewiesen, welche Überlegungen vorläufig oder endgültig sind und wie der Begründungszusammenhang zu lesen ist. Verschiedentlich treten auch logisch falsche Darstellungen auf.

(d) Kontrollaktivitäten: Nur bei wenigen Probanden sind Kontrollaktivitäten zu rekonstruieren, etwa wenn fehlerhafte oder sich widersprechende Äußerungen durchgestrichen sind. Ausgewiesene Überprüfungen von Überlegungen oder von Zwischen- oder Endergebnissen sind gar nicht zu finden.

Literatur

Jordan, A. & Ross, N. & Krauss, S. & Baumert, J. & Blum, W. & Neubrand, M. & Löwen, K. & Brunner, M. & Kunter, M. (2006): Klassifikationsschema für Mathematikaufgaben: Dokumentation der Aufgabenklassifikation im COACTIV-Projekt. Berlin: Max-Planck-Institut für Bildungsforschung.

KMK (2003): Vereinbarung über Bildungsstandards für den mittleren Schulabschluss (Jahrgangsstufe 10). Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 4.12.2003.

KMK (2008): Ländergemeinsame inhaltliche Anforderungen für die Fachwissenschaften und Fachdidaktiken in der Lehrerbildung. Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 16.10.2008.

Krauss, S. & Neubrand, M. & Blum, W. & Baumert, J. & Brunner, M. & Kunter, M. & Jordan, A. (2008): Die Untersuchung professionellen Wissens deutscher Mathematik-Lehrerinnen und –Lehrer im Rahmen der COACTIV-Studie. In: Journal für Mathematik-Didaktik, 29(2008)3/4, 223 – 258.

Sjuts, J. (2006): Unterrichtliche Gestaltung und Nutzung kompetenzorientierter Aufgaben in diagnostischer Hinsicht. In: Blum, W. & Drücke-Noe, Ch. & Hartung, R. & Köller, O (Hrsg): Bildungsstandards Mathematik: konkret. Sekundarstufe I: Aufgabenbeispiele, Unterrichtsanregungen, Fortbildungsideen. Berlin. 96 – 112.