

Anneke FREDEBOHM, Regina BRUDER, TU Darmstadt  
Timo LEUDERS, Markus WIRTZ, PH Freiburg

## **Empiriegestützte Itementwicklung für die Kompetenzmodellierung des Arbeitens mit algebraischen Repräsentationen von funktionalen Zusammenhängen**

Im Rahmen des DFG-Schwerpunktprogramms „Kompetenzmodelle zur Erfassung individueller Lernergebnisse und zur Bilanzierung von Bildungsprozessen“ beschäftigt sich das Projekt HEUREKO<sup>1</sup> mit dem *HEUristischen Arbeiten mit REpräsentationen funktionaler Zusammenhänge* und der *Diagnose mathematischer KOMPetenzen von Schülerinnen und Schülern* in diesem Bereich. Nachdem in der ersten Projektphase ein theoretisches Kompetenzstrukturmodell entwickelt und erstmals empirisch überprüft wurde (Bruder, Leuders & Wirtz, 2009), wird anhand der daraus gewonnenen Erkenntnisse dieses Modell in der zweiten Phase ergänzt und ebenfalls wieder empirisch untersucht.

### **1. Kompetenzmodellierung**

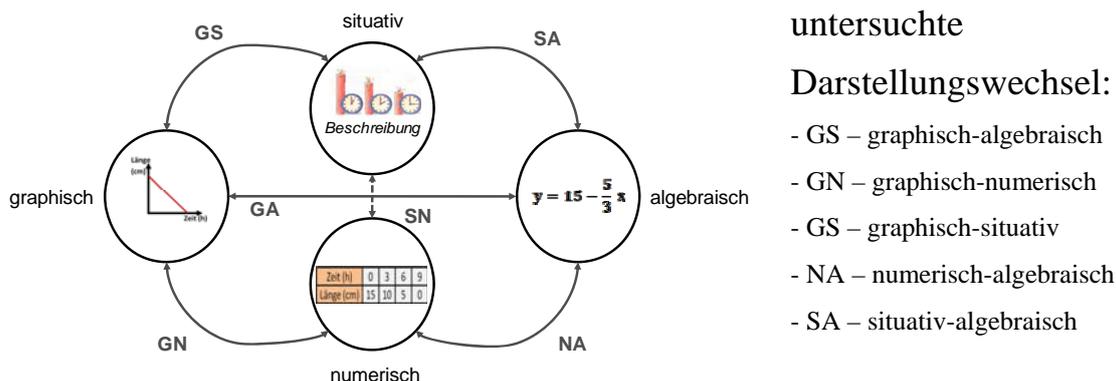
Für den erfolgreichen Umgang mit Funktionen zum mathematischen Modellieren und Problemlösen sind ein ganzheitliches Begriffsverständnis sowie das Wechseln zwischen verschiedenen Darstellungsformen wichtig. Nach Vollrath (1989) spielen die folgenden drei Aspekte des funktionalen Denkens eine tragende Rolle für das ganzheitliche Verständnis von Funktionen: *Zuordnungsaspekt*, *Kovariationsaspekt* und *Objektaspekt*. Diese drei Aspekte werden durch die verschiedenen Darstellungsmöglichkeiten von Funktionen unterschiedlich gut repräsentiert. Während bei einer Darstellung als Graph alle drei Aspekte erkennbar sind (hier insbesondere der Zuordnungsaspekt), können beispielsweise in einer Wertetabelle zwar Zuordnungs- und Kovariationsaspekt wiedererkannt werden, der Objektaspekt der Funktion ist hierbei jedoch äußerst schwer wiederzufinden, da eine Wertetabelle immer nur einen kleinen Ausschnitt der Funktion darstellen kann. Dagegen ist der Objektaspekt besonders gut in der algebraischen Darstellung über die Funktionsgleichung erkennbar. In Erweiterung der Kompetenzmodellierung in der ersten Phase des Projekts ab der Klassenstufe 7 enthält das erweiterte Kompetenzstrukturmodell der zweiten Phase

---

<sup>1</sup> Diese Veröffentlichung wurde ermöglicht durch eine Sachbeihilfe der Deutschen Forschungsgemeinschaft (Kennzeichen: LE 2335/1-1) im Schwerpunktprogramm „Kompetenzmodelle zur Erfassung individueller Lernergebnisse und zur Bilanzierung von Bildungsprozessen“ (SPP 1293).

auch die algebraische Darstellung mit den relevanten Darstellungswechseln.

Folgende Darstellungen werden im Projekt HEUREKO betrachtet: *Graph* (*G*), *Wertetabelle* (*N* – numerisch), *Funktionsgleichung* (*A* – algebraisch) und *Situationsbeschreibung* (*S*). Die verschiedenen Darstellungswechseln bilden in dem postulierten Kompetenzstrukturmodell (siehe Abb. 1) die unterschiedlichen Dimensionen.



**Abbildung 1** Kompetenzmodell (Darmstadt, 2. Phase)

Ziel der Studie ist zunächst die empirische Untersuchung des Kompetenzstrukturmodells. Langfristig ist geplant, ein Diagnose-Instrument für den Einsatz im Mathematikunterricht zu entwickeln, um Lehrkräften die Möglichkeit zu geben, den aktuellen Stand sowie spezifische Stärken und Schwächen ihrer Schülerinnen und Schüler<sup>2</sup> festzustellen.

## 2. Aufgabenkonstruktion

Für die empirische Untersuchung wurden insgesamt 278 mathematische Aufgaben konstruiert. Um dabei eine gewisse Bandbreite an unterschiedlichen Aufgabenschwierigkeiten zu gewährleisten, wurden unterschiedliche Handlungsanforderungen eingeführt (Bruder & Brückner, 1989). Aufgaben können damit sowohl einem Darstellungswechsel sowie einer der folgenden vier Handlungsanforderungen zugeordnet werden: Identifizieren, Realisieren, Erklären – Beschreiben oder Erklären – Argumentieren.

In einer Pilotierung an zwei Gymnasien (N=87) wurden 168 der konstruierten Aufgaben stellvertretend untersucht. Die Schüler wurden zu den Aufgaben sowie ihren Vorgehensweisen befragt um Schwierigkeiten und Probleme festzustellen. Die Aufgaben wurden daraufhin für die Hauptstudie

<sup>2</sup> Aus Gründen der besseren Lesbarkeit wird im Folgenden der Begriff Schüler benutzt. Damit sind sowohl Schülerinnen als auch Schüler gemeint.

überarbeitet. Auf diese Weise konnten ungewollte Schwierigkeitsfaktoren (wie z.B. den Schülern unbekannte Begriffe) ausgeschlossen werden.

### 3. Durchführung der empirischen Studie

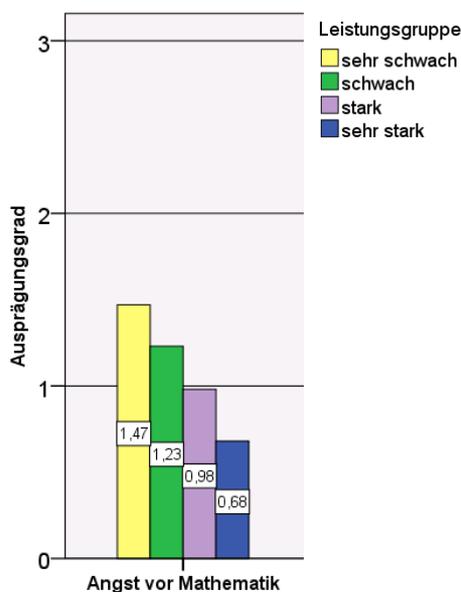
An der Studie nahmen 9. und 10. Klassen von 8 Gymnasien aus dem Raum Südhessen teil. Die von uns eingesetzten Instrumente umfassten einen im Vorfeld eingesetzten Schülerfragebogen sowie einen Grundwissentest, einen Lehrerfragebogen und den Haupttest. Die Stichprobe des Haupttests bestand aus N=645 Schülern.

### 4. Erste Ergebnisse

Im Mittel bearbeiteten die Schüler 19,31 Aufgaben. Davon lösten sie im Durchschnitt 7,62 Aufgaben richtig. Die Leistung der 9. Klassen unterschied sich dabei nicht signifikant von der Leistung der 10. Klassen. Betrachtet man die in den Aufgaben geforderten Darstellungswechsel so zeigen sich bezüglich der Lösungsrate (Anzahl der Schüler, die die Aufgabe gelöst haben im Verhältnis zur Anzahl der Schüler, die diese bearbeitet haben) zwar Unterschiede, diese sind jedoch relativ gering (siehe Tabelle 1). Eine relativ hohe Streuung zeigt, dass eine hohe Breite an Schwierigkeitsgraden erreicht werden konnte.

Darstellungswechsel	mittlere Lösungsrate & Streuung s
GN	48% (s=25,04)
GS	41% (s=22,54)
GA	38% (s=19,1)
SA	34% (s=24,55)
NA	33% (s=19,27)

**Tabelle 1**



**Abbildung 2** SFB-Skala Angst vor Mathematik im Zusammenhang mit der Testleistung

Der eingesetzte Schülerfragebogen beinhaltete 52 Fragen zu Lerngewohnheiten und zur Einstellung zum Mathematikunterricht. Zusammenhänge mit der erreichten Testleistung (hier als die individuelle Lösungsrate = *gelöste Aufgaben / bearbeitete Aufgaben* definiert) lassen sich bei verschiedenen, im Schülerfragebogen erfassten, Skalen erkennen. Besonders auffällig ist hierbei die Skala *Angst vor Mathematik*. Schüler mit einer schwachen Testleistung zeigen eine signifikant höhere Ausprägung auf dieser Skala als Schüler mit einer starken Testleistung (siehe Abb. 2). Weiterhin auffällig sind die empfundene Kompetenzunterstützung von Seiten der Lehrkraft (leistungsstarke Schüler

fühlen sich signifikant besser unterstützt), die Selbstwirksamkeit (leistungsstarke Schüler haben eine signifikant höhere Ausprägung) sowie die Anwendung von Wiederholungsstrategien beim Lernen (diese werden signifikant häufiger von leistungsschwachen Schüler genutzt).

Um zu ermitteln, ob die Schüler über die nötigen Grundkompetenzen im Umgang mit Funktionen verfügen, wurde im Vorfeld ein Grundwissentest mit 15 Aufgaben eingesetzt. Von diesen lösten die Schüler im Mittel 9,24 Aufgaben richtig. Die Ergebnisse des Grundwissentests spiegeln Schwierigkeiten der Schüler im Haupttest wider. So wurden beispielsweise kontexthaltige Aufgaben von weniger Schülern richtig gelöst als andere Aufgaben. Auffällig ist, dass die Schüler Schwierigkeiten hatten, anhand eines vorgegebenen Graphen die Steigung zu ermitteln. Kaum Schwierigkeiten machte ihnen dagegen die Aufgabe, anhand einer graphischen Darstellung im Koordinatensystem zu entscheiden, ob es sich um eine Funktion handelt oder nicht. Es zeigte sich außerdem ein signifikanter Zusammenhang zwischen der Leistung im Grundwissentest und der Leistung im Haupttest.

## 5. Ausblick

Um das Kompetenzstrukturmodell empirisch zu überprüfen ist geplant, ein Einparameter-Logistisches Modell (1PL-Modell) nach Rasch zugrunde zu legen. Dafür wird ein Modellvergleich durchgeführt, bei dem berechnet wird, inwiefern die empirisch ermittelten Daten zum postulierten Modell passen oder inwiefern verschiedene Alternativmodelle die Daten besser erklären können. Verglichen werden das 5-dimensionale postulierte Modell, ein 1-dimensionales Modell und verschiedene 2-dimensionale Modelle. Diese Modellüberprüfung wird mittels der Software *ConQuest* und *MPlus* durchgeführt. Desweiteren werden in Hinblick auf das geplante Diagnose-Instrument in einem nächsten Schritt ungeeignete Aufgaben identifiziert. Weitere Auswertungen betreffen die Lehrerbefragungen und könnten Aufschluss geben über Zusammenhänge von Testleistung und Lehrbuch, Bekanntheitsgrad der Aufgaben sowie Zeitpunkt der Unterrichtung.

## Literatur

- Bruder, R. & Brückner, A. (1989). Zur Beschreibung von Schülertätigkeiten im Mathematikunterricht – ein allgemeiner Ansatz. In: *Pädagogische Forschung*, Berlin 30 (1989) 6, 72-82.
- Vollrath, H. J. (1989). Funktionales Denken, *Journal für Mathematikdidaktik*, (10), 3-37.
- Bruder, R., Leuders, T., & Wirtz, M. (2009). Ein diagnostisches Kompetenzstrukturmodell für ein heuristisches Arbeiten mit Repräsentationen von Funktionen und seine empirische Überprüfung. In: M. Neubrand (Ed.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2009* (pp. 485–488). Münster: WTM Verlag.