Hedwig GASTEIGER, LMU München

Strategieverwendung bei Aufgaben zum kleinen Einmaleins

Die Erarbeitung der Aufgaben des kleinen Einmaleins erfolgte lange Zeit über eine eher isolierte Behandlung der Einmaleinsreihen. Im Sinne des aktiv-entdeckenden Lernens wird seit einigen Jahren ein ganzheitliches Vorgehen vorgeschlagen, bei dem mit Hilfe bereits bekannter Einmaleinssätze andere erschlossen werden (vgl. Wittmann, Müller 1994). Wovon die Strategiewahl beim Lösen von Einmaleinsaufgaben abhängt und welche Strategien Kinder wählen, sind Fragestellungen, die hier erörtert werden.

Erarbeitung des kleinen Einmaleins

Die Verwendung von Strategien spielt beim Kopfrechnen und beim halbschriftlichen Rechnen eine zentrale Rolle. Grundvoraussetzung dafür ist es, operative Zusammenhänge zu verstehen und nutzen zu können (vgl. Wollring 2009). Insofern besteht in der deutschen mathematikdidaktischen Literatur weitgehend Konsens, das Einmaleins zu erarbeiten, indem ein „Netz von Beziehungen zwischen den Aufgaben zur Multiplikation“ (Schipper 2009, S. 154) geschaffen wird. Aufgrund dieser Beziehungen werden mithilfe geeigneter, auf den Rechengesetzen basierender Strategien die Ergebnisse von Einmaleinssätzen ermittelt. Die Erarbeitung des kleinen Einmaleins erfolgt in der Regel über einen zunächst ganzheitlichen Zugang zu allen Einmaleinssätzen. Die systematische Erarbeitung der Zusammenhänge schließt sich an. Auf der Basis sogenannter Kernaufgaben (Einmaleinssätze mit 1, 2, 5, 10 und ggfs. Quadrataufgaben) werden die restlichen Einmaleinssätze erschlossen. Steht nach wie vor der Reihengedanke im Vordergrund, spricht man auch von „kurzen Reihen“ (Wittmann, Müller 1994, S. 110). Darunter versteht man die Ergebnisse der Kernaufgaben einer Einmaleinsreihe. Mögliche Strategien zur Erschließung von Einmaleinssätzen über Kernaufgaben werden exemplarisch am Beispiel $7 \cdot 8$ aufgezeigt:

Strategie	*mögl. Lösung*
Nachbaraufgabe: additive oder subtraktive Veränderung des ersten oder zweiten Faktors um 1	$7 \cdot 7 + 7$ $8 \cdot 8 - 8$
Sukzessive Verdoppelung/Halbierung eines Faktors	14, 28, 56
Gegensinniges Verändern: Vervielfachung eines Faktors mit x bei Teilung des zweiten Faktors durch x	$14 \cdot 4$ $28 \cdot 2$
Zerlegung eines Faktors: additive oder subtraktive	$5 \cdot 8 + 2 \cdot 8$

Veränderung des ersten oder zweiten Faktors 10 · 7 - 2 · 7

Ziel der Erarbeitung des Einmaleins auf diese Art und Weise ist es, mit dem Durchdringen der operativen Beziehungen eine Grundlage für strategisches Rechnen über das kleine Einmaleins hinaus zu schaffen und zudem auch zu einer Automatisierung der Einmaleinssätze zu gelangen. Letzteres wird vor allem im Zusammenhang mit dem Überschlagsrechnen, den schriftlichen Rechenverfahren und dem Aufbau von Zahl- und Größenvorstellung nach wie vor als wichtig erachtet (vgl. Padberg 2005).

Forschungsergebnisse

Einige Forschungsergebnisse dienen als Argumente für eine Erarbeitung des Einmaleins über operative Beziehungen. Zunächst gibt es Untersuchungsergebnisse zur Informationsverarbeitung, die einen Hinweis darauf geben, dass bewusste und kontrollierte mentale Vorgehensweisen einen Automatisierungsprozess initiieren können (Shriffin, Schneider 1977). Erachtet man die Automatisierung der Einmaleinssätze als wichtiges Ziel, ist dadurch ein grundlegendes Argument gegeben, dass auch in diesem Sinne die Herleitung von Einmaleinssätzen über Strategien erfolgreich sein kann.

Neben informellen Strategien, wie beispielsweise sukzessive Addition, Aufsagen der Einmaleinsreihe oder direktes Modellieren von Aufgabenstellungen mit Material, sind weitere Strategien wichtig. Dies wird durch Untersuchungsergebnisse gestützt, die zeigen, dass informelle Strategien, vor allem wenn sie fehlerhaft ausgeführt werden, zu einem geringeren Automatisierungsgrad führen (Lemaire, Siegler 1995).

Darüber hinaus scheint Strategielernen in Verbindung mit automatisierendem Üben vor allem bei Aufgabenstellungen zur Übertragung von Strategien und zum Überschlagen in jeweils größeren Zahlbereichen zu besseren Ergebnissen zu führen, als rein automatisierendes Üben (Woodward 2006).

Einflüsse auf die Strategiewahl

Obwohl das oben geschilderte Vorgehen zur Erarbeitung des Einmaleins in Deutschland weitgehend unumstritten ist, gibt es bislang kaum Erkenntnisse darüber, ob und welche Strategien zur Lösung von Einmaleinsaufgaben von Kindern verwendet werden. Allerdings gibt es – in der Regel aus Untersuchungen zur Addition und Subtraktion im zwei- und dreistelligen Bereich – einige Aussagen darüber, welche Faktoren die Strategiewahl beeinflussen. Das Zahlenmaterial in der Aufgabenstellung wird von manchen Kindern berücksichtigt und als Entscheidungsgrundlage für die Wahl der Strategie herangezogen. Ebenso gibt es individuell bedingte Entscheidungskritierien. Dazu gehören z.B. die Sicherheit und Schnelligkeit, mit der eine Aufgabe mit einer bestimmten Strategie gelöst werden kann, aber auch die individuell verfügbaren Basisfakten. Auch sozio-mathematische Normen oder unterrichtliche Gegebenheiten, wie z.B. die explizite Vermittlung einer Strategie, spielen eine Rolle bei der Strategie-wahl (vgl. Torbeyns, Verschaffel, Ghesquière 2006; Threlfall 2002). Die Bereitschaft, einen Strategiewechsel zu vollziehen, steigt durch die individuelle Erkenntnis, dass bestimmte Aufgaben mit einer neuen Strategie schneller und erfolgreicher gelöst werden können (vgl. Lemaire, Siegler 1995).

Ergebnisse aus einer Interviewstudie

Um Aufschluss über die Strategieverwendung bei verschiedenen Einmaleinsaufgaben gewinnen zu können, wurden 22 Kinder (12 Mädchen, 10 Jungen) in Einzelinterviews über ihre Lösungswege befragt (Paluka-Grahm 2010). Unter anderem sollten folgende Fragestellungen geklärt werden:

- Wie werden die Multiplikationsaufgaben gelöst?
- Zeigen sich bei der Strategiewahl Abhängigkeiten von der Aufgabenstellung und/oder individuelle Präferenzen?

Die Multiplikationsaufgaben wurden mit 8⊕□ □⊕□ □⊕□ □⊕□ und □⊕□ so ausgewählt, dass bei jeder Aufgabe verschiedene Strategien möglich sind. Darüber hinaus wurde die Fähigkeit, Strategien übertragen zu können, ermittelt, indem die Kinder gefragt wurden, ob sie eine Lösungsidee für die Aufgabe 19 ⊕□ hätten. Von den insgesamt 110 (richtig) gelösten Aufgaben zum kleinen Einmaleins erfolgte die Lösung bei 66% der Aufgaben über Strategien auf der Basis operativer Beziehungen, 14 % wurden über sukzessive Addition gelöst und 20 % waren bereits automatisiert. Im Einzelnen kamen folgende Strategien zum Einsatz (Prozentzahlen im Uhrzeigersinn, beginnend mit: Nachbaraufgabe additiv, 26%):

Die Nachbaraufgabe war somit mit 41% die am häufigsten angewandte Strategie. Diese bot sich aber auch bei vielen Aufgaben an (8⊕□ □⊕□ □⊕□ □⊕□. Sie ist ein Sonderfall des Zerlegens. Das Zerlegen ohne Verwendung einer Nachbaraufgabe wäre bei 8⊕□ □⊕□ 5⊕8 denkbar. Diese

Strategie kam mit 8% seltener vor, wurde jedoch ebenfalls aufgabenadäquat eingesetzt. Bei der Strategiewahl lässt sich insgesamt eine Aufgabenabhängigkeit erkennen. Deutlich mehr als die Hälfte aller Kinder lösten z.B. 8⊕□ und □⊕□ mit einer Nachbaraufgabe. Mit etwas über einem Drittel aller Kinder war das Verdoppeln die Hauptstrategie bei den Aufgaben □⊕□ und 5⊕8. Individuelle Strategiepräferenzen zeigten sich wenig. Ein Kind löste 4 der 5 Aufgaben über sukzessive Addition, ein Kind hatte bereits 4 Aufgaben automatisiert und 2 Kinder lösten 5 bzw. 4 Aufgaben über Nachbaraufgaben. 8% der Lösungen wurden über Aufgaben erschlossen, die keine Kernaufgaben sind. Mit neun Kindern konnten 41% der Kinder ihr Strategiewissen auch übertragen und eine auf operativen Beziehungen beruhende Lösungsidee zur Aufgabe 19⊕8 nennen. Die Ergebnisse zeigen, dass Strategien adäquat zum Einsatz kommen und zu richtigen Lösungen führen. Inwieweit die Erarbeitung über operative Beziehungen zur Automatisierung führt, bleibt ebenso noch zu untersuchen wie Unterschiede zwischen leistungsschwachen und leistungsstarken Kindern und der Einfluss des Unterrichts.

Literatur

Lemaire, P. & Siegler, R. S. (1995). Four aspects of strategic change: Contributions to children’s learning of multiplication. In: Journal of Experimental Psychology, 124/1, 83-97.

Padberg, F. (2005). Didaktik der Arithmetik für Lehrerausbildung und Lehrerfortbildung. 3. Auflage. Spektrum: München.

Paluka-Grahm, S. (2010). Multiplikationsstrategien von Grundschülern. Eine Interviewstudie in Jahrgangsstufe 3. Unveröffentlichte Examensarbeit.

Schipper, W. (2009). Handbuch für den Mathematikunterricht an Grundschulen. Braunschweig: Schroedel.

Shriffin, R. M. & Schneider, W. (1977). Controlled and automatic human information processing: II. Perceptual learning, automatic attending, and a general theory. In: Psychological Review, 84/2, 127-190.

Threlfall (2002). Flexible mental calculation. In: Educational Studies in Mathematics, 50, 29-47

Torbeyns, J., Verschaffel, L. & Ghesquière, P. (2006). The development of children’s adaptive expertise in the number domain 20 to 100. In: Cognition and Instruction, 24/4, 439-465

Wittmann, E. Ch. & Müller, G. N. (1994). Handbuch produktiver Rechenübungen. Band 1: Vom Einspluseins zum Einmaleins. 2. überarb. Auflage. Stuttgart: Klett.

Wollring, B. (2009). Muster und Strukturen in operativen Übungen. Persönliche Mitteilung.

Woodward, J. (2009). Developing automaticity in multiplication facts: Integrating strategy instruction with timed practice drills. In: Learning Disability Quarterly, 29, 269-289.