

Thomas GAWLICK, Diemut LANGE, Hannover

Mathematisches vs. fächerübergreifendes Problemlösen - individuell und kooperativ

Im Rahmen des MALU-Projekts (Lange 2010), in dem mathematisch verschieden interessierte Fünftklässler in Paaren mathematische Problemaufgaben bearbeiten sollten, stellte sich die Frage nach der Vorhersagbarkeit dieser Paar-Problemlöseleistung mit Hilfe von Tests. Gawlick und Lange (eingereicht) konnten zeigen, dass sich weder Schulnoten (in Mathematik und Deutsch) noch allgemeine oder mathematikspezifische Begabungstests zur Vorhersage eignen. Auch im Rahmen der PISA-2000-Erweiterungsstudie konnten individuelle kognitive Merkmale die Varianz in den Gruppenergebnisse der fächerübergreifenden Problemlösekompetenz nur zu einem geringen Teil erklären (Kunter et al. 2005, S. 114). Denkbar wäre folglich, dass fächerübergreifendes Problemlösen sensu PISA und mathematisches Problemlösen verwandte Konstrukte darstellen.

1. Theoretischer Hintergrund

Das *Mathematische Problemlösen* (MPL) lässt sich wie folgt konzeptualisieren: „Im folgenden verstehen wir unter einem Problem eine Aufgabe, die dem Bearbeiter beim Lösen eine **Barriere** entgegenstellt. Ob eine Aufgabe ein Problem darstellt, hängt von den **Erfahrungen, Kenntnissen und Fähigkeiten** des **Problemlösers** ab.“ (Vollrath 1992) Demzufolge kann man a priori nicht anhand von Aufgabenmerkmalen festlegen, was eine Problemaufgabe ist. Daher ist folgende Definition sinnvoll:

i) Eine Aufgabe ist für ihren Bearbeiter genau dann eine **mathematische Problemaufgabe**, wenn bei ihrer Bearbeitung ein Prozess des Problemlösens stattfindet (im Gegensatz zu einem Routineprozess).

Problemlöseprozesse werden charakterisiert mittels des Schemas von Polya (1949), operationalisiert nach Schoenfeld, vgl. Rott (in diesem Band):

ii) Ein **Problemlöseprozess** ist ein Bearbeitungsprozess mit heuristischen Phasen: also eine Explorations-, evtl. auch eine ausführliche Analysephase.

Dem gegenüber steht das Konzept des *fächerübergreifenden Problemlösens* der PISA-Studie (PPL). Dieses baut auf dem psychologischen Problemlöseverständnis auf: „Ein 'Problem' entsteht z.B. dann, wenn ein Lebewesen ein Ziel hat und nicht **'weiß'**, wie es dieses Ziel erreichen soll. Wo immer der gegebene Zustand sich nicht durch bloßes **Handeln (Ausführen selbstverständlicher Operationen)** in den erstrebten Zustand überführen lässt, wird das Denken auf den Plan gerufen.“ (Duncker 1935, S. 1) Wie

anhand der Blaufärbung ersichtlich, stimmt dieses Konstrukt formal weitgehend mit MPL überein. Inhaltlich wird PPL im Rahmen von PISA so definiert – die Abweichung von MPL ist rot gekennzeichnet: „Problem solving is an individual's capacity to use cognitive processes to confront and **resolve real, cross-disciplinary situations** where the **solution path is not immediately obvious** and where the literacy domains or curricular areas that might be applicable are not within a single domain of mathematics, science or reading.” (OECD 2003, S. 156) Konkretisiert wird dies etwa in der PISA-Projektaufgabe „Energie- und Wassersparen in der Schule“ (Klieme et al. 2005, S.42ff) – nachfolgend ein Ausschnitt:

Vorschläge sammeln

Ihr habt folgende sechs Vorschläge zum Energie- und Wassersparen gesammelt:

1. Im Lehrerzimmer statt der Wärmhalteplatte der Kaffeemaschine die vorhandene Thermoskanne nutzen.

2. Isolierglas in die Fenster einbauen.

3. Ein großes Becken bauen, Regenwasser darin sammeln und in die Toilettenspülung pumpen.

4. Spartasten in die Toilettenspülung einbauen.

5. Die Getränkeautomaten in schulfreien Zeiten abschalten.

6. Im Winter lieber kurz und kräftig lüften und dann die Fenster wieder schließen.

Ihr wollt

- die Vorschläge danach sortieren, was sie sparen: Strom, Wasser oder Heizenergie, und
- entscheiden, für welche Vorschläge bauliche oder technische Veränderungen nötig sind und für welche nicht.

Dazu habt ihr folgende Tabelle erstellt:

	Der Vorschlag spart Strom	Der Vorschlag spart Wasser	Der Vorschlag spart Heizenergie
Ohne Vorbereitung umsetzbar	a	b	c
Benötigt bauliche oder technische Veränderungen	d	e	f

Welche Vorschläge gehören in welche Felder? Markiere jeweils eine Antwort!

1. Der 1. Vorschlag gehört in Feld	a	b	c	d	e	f
2. Der 2. Vorschlag gehört in Feld	a	b	c	d	e	f
3. Der 3. Vorschlag gehört in Feld	a	b	c	d	e	f
4. Der 4. Vorschlag gehört in Feld	a	b	c	d	e	f
5. Der 5. Vorschlag gehört in Feld	a	b	c	d	e	f
6. Der 6. Vorschlag gehört in Feld	a	b	c	d	e	f

Eine weitere Differenzierung ist, ob Aufgaben individuell oder kooperativ bearbeitet werden. Kunter et. al (2005) diskutieren verschiedene Möglichkeiten, individuelle Prädiktoren zur Vorhersage des Paarergebnisses zu aggregieren (Mittelwert, Maximum, Minimum der Prädiktoren), erzielen damit aber jeweils nur eine geringe Varianzaufklärung. Wir haben daher eine andere Vorgehensweise gewählt: Neben das Konstrukt iMPL der *individuellen mathematischen Problemlöseleistung* tritt das Konzept kMPL der *kooperativen mathematischen Problemlöseleistung*. Dies wird operationalisiert durch die *individuellen* Ergebnisse eines Probanden, die er in einem *kooperativen*. Problemlöseprozess erzielt hat Entsprechend für PPL.

Auf diesem theoretischen Hintergrund formulieren wir nun folgende

2. Fragestellung

Sind die Konstrukte iMPL und iPPL bzw. kMPL und kPPL durch ihre formalen Gemeinsamkeiten überwiegend identisch oder sind sie aufgrund der Inhaltsunterschiede eher voneinander verschieden?

3. Die Studie

Dazu wurden in vier sechsten Klassen eines Hannoveraner Gymnasiums die vier Teilaufgaben der PISA-2000-Projektaufgabe „Energie- und Wassersparen“ sowie zwei Begabungstests (CFT-20R und eine verkürzte Version des Indikatoraufgabentests von Käpnick (1998)) und insgesamt acht mathematische Problemaufgaben bearbeitet. Zur Auswahl der Tests vgl. Lange & Gawlick (eingereicht), zur Aufgabenauswahl Lange (2009). Zusätzlich wurden die Halbjahresschulnoten in Mathematik und Deutsch erhoben. Von insgesamt 84 Sechstklässler existieren alle Daten.

Zwei der acht gewählten mathematischen Problemaufgaben der MALU-Förderung waren die Schachbrettaufgabe (Lange 2009) und die Schüler-AG-Aufgabe (Lange 2010). Bewertet wurde jeder Erkenntnisschritt, der bei Sechstklässlern aufgrund des Vorwissens beim Lösen der Aufgabe zu erwarten ist (s. auch Lange & Gawlick (eingereicht)). Es wurden vier Aufgaben individuell und vier andere im Paar bearbeitet. In den Paarbearbeitungen wurden die Bearbeitungen der Schüler individuell bewertet. Diese individuelle Paar-Problemlöseleistung misst also das oben definierte Konstrukt kMPL. Die vier individuell bearbeiteten Aufgaben messen iMPL, die PISA-Projektaufgabe misst iPPL. Es wäre naheliegend gewesen, zum Vergleich auch kPPL zu erheben, allerdings lag uns zum Testzeitpunkt die dazu in PISA verwendete „Schulgartenaufgabe“ nicht vollständig vor.

4. Ergebnisse und Diskussion

Die Testergebnisse, Noten und Problemlöseleistungen wurden bivariat korreliert (die Schulnoten wurden umgepolt):

N=84	iPPL	iMPL	kMPL
CFT-20R	$r = .265^*$	$r = .204$	$r = .102$
Käpnicktest	$r = .246^*$	$r = .243^*$	$r = .170$
Mathematiknote	$r = .153$	$r = .303^{**}$	$r = .430^{**}$
Deutschnote	$r = .249^*$	$r = .241^*$	$r = .260^*$
iPPL	--	$r = .162$	$r = .150$
iMPL	--	--	$r = .330^{**}$

Die schwache Korrelation der iPPL und der iMPL von $r = .162$ bestätigt die Vermutung, dass die Inhaltsunterschiede der Konstrukte gegenüber ihren formalen Gemeinsamkeiten überwiegen. Vergleicht man die bivariaten

Korrelationen der Prädiktoren mit der iPPL und die mit der iMPL (1. und 2. Tabellenspalte) miteinander, so fällt der unterschiedlich hohe Zusammenhang mit der Mathematiknote auf: Die Mathematiknote hängt näher mit der iMPL zusammen als mit der iPPL, wofür auch die Höhe der Korrelation mit der kMPL (3. Spalte) spricht. Es ist einsichtig, dass der letzte Wert höher ist, da ja in die Mathematiknote auch kooperative Beiträge eingehen („mündliche Note“). Dass die Korrelation von Mathematiknote mit kMPL nur von mittlerer Größe ist, erscheint ebenfalls als sehr plausibel: Im Mathematikunterricht spielen die Bearbeitung von Standardaufgaben und das dazu nötige Vorwissen eine weit größere Rolle als im mathematischen Problemlösen – Wettbewerbs- und Förderaufgaben sollen ja stufenübergreifend einsetzbar und gerade nicht routinemäßig lösbar sein.

Insgesamt scheint damit die Vermutung bestätigt, dass Mathematisches Problemlösen ein eigenständiges Konstrukt ist, das sich in eine individuelle Komponente iMPL und eine kooperative Komponente kMPL differenziert.

Es ist überraschend, dass iMPL und kMPL mit $r = .330$ lediglich mittel schwach korreliert sind, da ja die iMPL aufgrund der inhaltlichen Nähe der beste Prädiktor für die kMPL darstellen müsste – in PISA lag der Zusammenhang zwischen den aggregierten individuellen und dem Gruppen-Problemlöseergebnis mit Werten zwischen $.29$ und $.35$ jedoch vergleichbar niedrig (Kunter et al. 2005, S. 111). Denkbar wäre, dass in der kMPL neben der iMPL die Kooperation als ein weiterer Faktor eingeht. Da sich bei PISA-2000 die Varianzerklärung durch Einbezug individueller sozialer Merkmale der Schüler kaum verbessern ließ (ibid., S. 113), liegt es nahe, sich die Merkmale der Kooperationsphasen in den Bearbeitungsprozessen näher anzuschauen (vgl. Beitrag von Lange in diesem Band).

Enttäuschend ist, dass sich iMPL und v.a. kMPL kaum durch Begabungstests vorhersagen lassen. Wenn für eine Begabtenförderung diejenigen Schülerinnen ausgewählt werden sollen, die mit den dort gestellten Aufgaben „etwas anfangen“ können, ist es daher naheliegend, bei der Auswahl stärker auf Aufgaben zu setzen, die denen in der Förderung ähneln. Dementsprechend haben wir bei neueren Durchgängen von MALU auch Aufgaben zur Messung von MPL eingesetzt und werden demnächst über die Vorhersage des Fördererfolgs berichten.

Literatur

Siehe Langfassung des Artikels unter: www.idmp.uni-hannover.de