Boris GIRNAT, Freiburg

Modellieren im Geometrieunterricht der Sekundarstufe: Ein zwiespältiges Unterfangen aus Lehrersicht

In einer qualitativen Studie, die Lehreransichten über den Geometrieunterricht der gymnasialen Sekundarstufe I erhebt und die subjektive Ziel-, Inhalts- und Methodenauswahl der neun teilnehmenden Lehrkräfte als individuelle Curricula rekonstruiert (vgl. Eichler, 2007), war ein Teilergebnis bemerkenswert und unerwartet: Sieben der neun Teilnehmer haben Vorbehalte, Geometrie anwendungsorientiert zu unterrichten und Aspekte des Modellbildens einzubeziehen. Dieses Teilergebnis wird hier aus dem Begründungskontext der Lehrkräfte heraus betrachtet und mit ausgewählten didaktischen Ansichten verglichen.

1. Bildungsziele des Geometrieunterrichts

Einem Vorschlag Hollands gemäß kann man den Umgang mit Geometrie in vier Hauptkategorien einteilen: Geometrie als Lehre vom Anschauungsraum, als deduktive Theorie, als Übungsfeld für das Problemlösen und als Vorrat mathematischer Strukturen (vgl. Holland, 2007, S. 19). Für fast alle Lehrer der Studie stehen das Problemlösen und die Geometrie als deduktive Theorie im Vordergrund ihres Unterrichts:

> Herr A: In der Analysis und noch schlimmer in der Stochastik wird man sehr viel öfter sagen: Das ist so, das können wir aber nicht beweisen, […] und das ist in der Geometrie hier anders. Also da sehe ich eigentlich jetzt keine großen Lücken.
>
> Frau G: Problemlösen, das ist neben Beweisen die wichtigste Sache, die ich eigentlich im Mathematikunterricht vermitteln möchte.
>
> Herr C: Also so Pythagoras: „Einmal ausgemessen, gilt!“ finde ich: Da geht ein Wert verloren. Also das würde mich stören. Das Pendel schlägt gerade in die Richtung aus […] also sich jetzt da voll auf die eine Seite zu schlagen und zu sagen: Geometrie, das ist für mich nur noch Landvermessung und irgendwie Ausrechnen, wie hoch die Pyramide ist und so, oder Zeichnen und Konstruieren von so was, das finde ich eigentlich auch ein bisschen mager dann.

Beweisen und Problemlösen werden als zentrale Bildungsziele des Geometrieunterrichts angesehen. Mit der Festlegung auf diese beiden Aspekte legt die Zieldimension eine spezifische erkenntnistheoretische Sicht auf die Geometrie nahe: In der Theorie geometrischer Paradigmen und Arbeitsbereiche werden drei Paradigmen innerhalb der euklidischen Geometrie unterschieden (vgl. Houdement und Kuzniak, 2001): Ein formalistischer, ein euklidischer und ein „natürlicher“ Standpunkt. Der formalistische spielt an der Schule keine Rolle; der euklidische geht von einer lokal geordneten Geometrie aus, in der jede Begründung deduktiv an Konfigurations- oder

Konstruktionsbeschreibungen anknüpft und ohne Rekurs auf Beobachtungen und Messungen an realen geometrischen Objekten zu erfolgen hat. Sie sind allenfalls als heuristische Hilfen zugelassen. Die „natürliche" Geometrie arbeitet hingegen empirisch und baut auf Mess- und Beobachtungsdaten als Argumentationsgrundlage auf.

2. Modellieren versus Beweisen und Problemlösen

Traditionelles Beweisen und Problemlösen, vor allem die typischen Interpolationsprobleme, setzen eine euklidisch-deduktive Sicht der Geometrie voraus (vgl. Holland, 2007, S. 172 – 174). Damit stellt sich unterrichtspraktisch das Problem, welche Argumentationsstandards in der Geometrie eingehalten werden sollen. Strebt man klassisches Beweisen und Problemlösen an, so liegt empirisches Arbeiten nicht in der Intention des Lehrers:

> Herr F: […], wobei ich bei meinen Schülern zumindest schon darauf wert lege, dass man auch auf die abstrakte Ebene kommt, quasi reine Geometrie betreibt, […] um ein bisschen den Anspruch zu haben, wir machen auch schon ein bisschen Wissenschaft. Da sind Zeichnungen, Objekte zum Anfassen, Messen und so weiter keine Hilfen, eher hinderlich.

Das Zitat von Herrn F macht auf ein systematisches Problem aufmerksam, das zwischen den Argumentationsgrundlagen und -standards in einem anwendungsorientierten, auf Modellbildung zielenden und einem auf Beweis- und Problemaufgaben ausgerichteten Geometrieunterricht besteht, so wie sie in der folgenden Tabelle zusammengestellt sind (vgl. Girnat, 2009):

Aspekt	*Modellbildung*	*Beweis-/ Problemaufgabe*
Gegenstand des Interesses	singuläre Situation	allgemeine Aussage oder Konfiguration
Erkenntnistheoretischer Zugang	durch Messung, Beobachtung und Experimente	durch Konfigurations-/ Konstruktionsbeschreibungen
Modellierung	Durch Vereinfachung	Vereinfachung unzulässig
Mathematische Methoden	Erstellung eines mathematischen Modells	Anwendung bekannter Sätze, Operatoren und Algorithmen
Überprüfung	empirisch	deduktiv

3. Methodologische Folgerungen

Um den Konflikt zwischen verschiedenen Standards und Grundlagen der Argumentation zu vermeiden, geben mehrere Lehrer an, streng zwischen „rein" geometrischen und anwendungsorientierten Phasen des Geometrieunterrichts zu trennen. Der Anwendungsbezug tritt in der Regel als motivierende Einführung oder als Wiederholung zum Abschluss einer Einheit auf:

> Herr B: [Geometrie] als Mittel, die Welt zu erschließen, wiederum eher stiefmütterlich, aber durchaus auch berechtigt nicht an erster Stelle. Es dient gerne dazu, in ein Sachgebiet einzuführen, die Berechtigung dieses Sachgebietes darzustellen, auch am Ende die Fähigkeiten in der Anwendung dieser Erschließung der Welt zu überprüfen. Aber vieles dazwischen muss einfach auch einmal losgelöst von der Wirklichkeit passieren dürfen. Es ist dann Mathematikunterricht in dem Sinne, dass Rechenverfahren und Argumentationsketten auch einmal losgelöst von viel Beiwerk, was vielleicht für die Aufgabe, für das mathematische Modell nicht so bedeutend ist, auch mal betrachtet werden können.

Eine so verstandenen Anwendungsorientierung ist weit davon entfernt, die Ziele eines auf „authentischen" Realitätsbezug ausgerichteten Unterrichts zu treffen, in dem Anwendungen nicht bloß Veranschaulichungen mathematischer Inhalte und Methoden sein sollen, sondern in dem auch utilitaristische und methodologische Ziele verfolgt werden, wie der Nutzen für reale Lebenssituation oder der Erwerb allgemeiner Modellierungskompetenzen (vgl. Kaiser-Meßmer, 1986, S. 123-126). Auch eine Ausweitung des Problemlösebegriffs über das deduktive Bearbeiten von Interpolationsproblemen tritt bei den befragten Lehrern nicht auf, also beispielsweise eine Erweiterung wie sie Wittmann beschreibt:

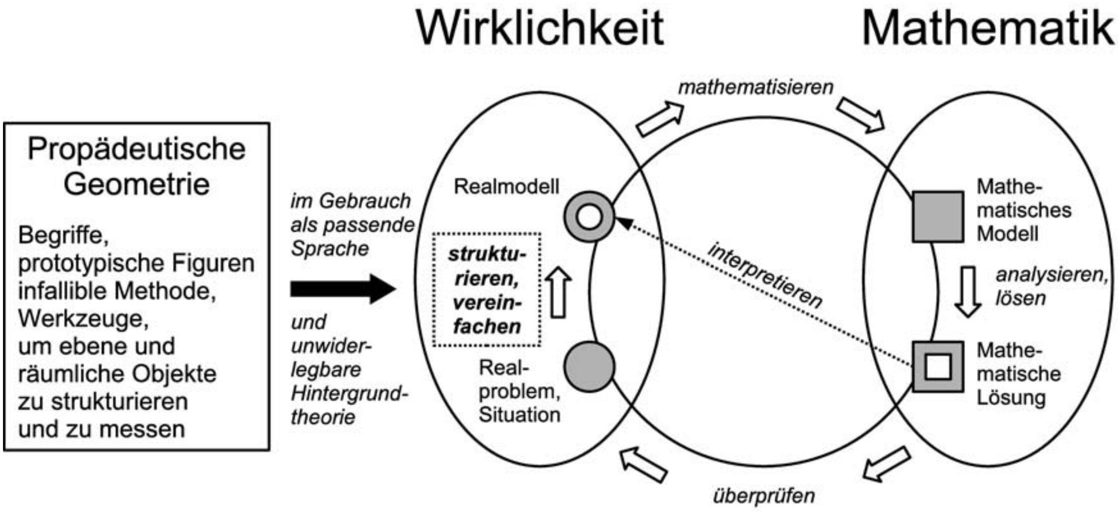
> In der jüngsten Diskussion überwiegt deshalb eine breitere Sichtweise des Problemlösens im Geometrieunterricht sowie – damit einhergehend – eine Verknüpfung mit anderen Aspekten:
>
> – Unter dem Aspekt der Anwendungsorientierung wird das Problemlösen nicht nur auf innermathematische Probleme beschränkt, sondern es kommt der Aspekt der Modellbildung hinzu.
>
> – der Aspekt der Kreativität rückt zunehmend ins Blickfeld; damit gewinnen offenen Probleme und Probleme, die eine Vielzahl von Lösungen auf unterschiedlichen Ebenen zulassen, an Bedeutung. (Wittmann, 2009, S. 87)

Stattdessen lässt sich nicht nur beobachten, dass rein geometrische und anwendungsorientierte Phasen im Unterricht getrennt werden, sondern dass Geometrie in Anwendungskontexten aus einer anderen Perspektive betrieben wird: Steht in der rein geometrischen Phasen das Argumentieren und Problemlösen im Vordergrund, so wird Geometrie bei Anwendungen vorwiegend als Hilfsmittel zur Längen-, Flächen- und Volumenberechnung eingesetzt, und zwar nicht so, dass diese geometrischen Verfahren dann erst anwendungsbezogen eingeführt würden, sondern so, dass sie aus den „rein" geometrischen Verfahren als bekannt vorausgesetzt werden:

> Frau D: Sehen wir uns die folgende Aufgabe an: „Ein Geschäftsmann möchte Salz in kleinen, rechteckigen Päckchen zu 250 Gramm verkaufen. Was würdest du ihm raten?" Das ist durchaus eine interessante Aufgabe mit einigen Heraus-

forderungen, wenn man sie wirklich ernst nimmt. Aber die Geometrie darin ist nicht interessant. Das ist Standard, und das muss man schon vorher gut verstanden haben, bevor man mit dieser Aufgabe anfängt.

Anders als im Modellierungskreislauf (vgl. Kaiser et al., 2006) kann sich diese Art der Anwendung nicht im Kreis wiederfinden lassen, sondern ist ihm logisch und methodisch vorgeordnet, sozusagen „propädeutisch“:



4. Offene Fragen

Mit dieser Beobachtung soll geschlossen und der Anstoß zu didaktischen Diskussionen gegeben werden: Weicht der Anwendungsbezug der Geometrie tatsächlich von Vorstellungen der Modellbildungstheorie ab und wie lassen sich die Leitideen der Anwendungsorientierung und des klassischen Beweisen und Problemlösens im Geometrieunterricht in Einklang bringen?

Literatur

Eichler, A. (2007). Individual curricula – Teachers’ beliefs concerning stochastics instruction. IEJME 2(3). Online: http://www.iejme.com/.

Girnat, B. (2009). Ontological Belief and Their Impact on Teaching Elementary Geometry. In: M. Tzekaki, M. Kaldrimidou, & H. Sakonidis (Eds.), Proceedings of the 33rd IGPME conference. Thessaloniki: PME, Band 3, S. 89-96.

Holland, Gerhard (2007): Geometrie in der Sekundarstufe. 3. Auflage. Hildesheim, Berlin: Franzbecker.

Houdement, C., und Kuzniak, A. (2001): Elementary Geometry Split into Different Geometrical Paradigms. Proceedings of CERME 3, Bellaria, Italy (Web).

Kaiser-Meßmer, G. (1986). Anwendungen im Mathematikunterricht I. Franzbecker: Bad Salzdetfurth.

Kaiser, G., Blomhoj, M., & Sriraman, B. (2006). Towards a didactical theory for mathematical modelling. ZDM, 38(2), 82-85.

Wittmann, G. (2009): Problemlösen. In: Weigand, H.-G. et al. (Hrsg.): Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe I. Heidelberg: Spektrum, 81–98.