Günter GRAUMANN, Bielefeld

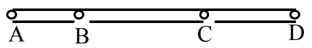
Typen nicht-konvexer Vierecke

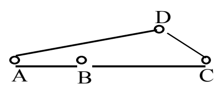
In der Schule werden in der Regel nur konvexe Vierecke behandelt. Daran kann man aber ohne großen zeitlichen Aufwand leicht die Behandlung nicht-konvexer Vierecke anschließen, wobei die Schülerinnen und Schüler einerseits ein breiteres Bild erhalten und andererseits (wie in der Mathematik üblich) erfahren, dass Definitionen Setzungen sind, über die man diskutieren kann. Darüber hinaus bietet dieses Problemfeld gute Möglichkeiten für die Entwicklung von Problemlösefähigkeiten das Training systematischer Vorgehensweisen.

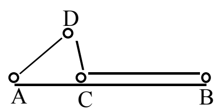
Wir definieren hierbei ein **Viereck** als einen geschlossenen Streckenzug, d.h. als die Vereinigungsmenge $\overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{CD} \cup \overline{DA}$, wobei A, B, C, D vier beliebige verschiedene Punkte sind. - Diese Definition erlaubt eine einfache Programmierung in einer DGS.

Von einem **ausgearteten Viereck** spricht man, wenn drei aufeinander folgende Eckpunkte kollinear sind. Unter den ausgearteten Vierecken kann man (wie leicht ersichtlich ist) folgende drei Typen feststellen:

- *Strecke* (alle vier Punkte liegen auf einer Geraden, z.B. A, B, C, D in einer Reihe),
- *Dreieck mit Unterteilung einer Seite* (z.B. A, B, C sind kollinear und C liegt auf der Halbgeraden von A über B und nicht auf $\overline{AB}$),
- *Dreieck mit ausladender Strecke* (z.B. A, B, C sind kollinear und C liegt auf der Strecke $\overline{AB}$ oder auf der Halbgeraden von A, zu der B nicht gehört.)

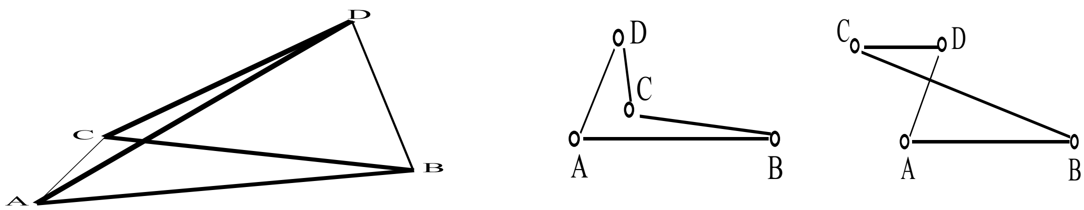






Wir wenden uns nun den **nicht-ausgearteten Vierecken** zu. Neben den bekannten konvexen Vierecken können wir grundsätzlich (d.h. unter affinem Gesichtspunkt) die folgenden drei verschiedenen Typen finden:

- die *räumlichen Vierecke* (z. B. als Streckenzug auf den Kanten einer Dreieckspyramide).
- die *konkaven Vierecke* (auch *Vierecke mit einspringender Ecke* genannt),
- die *Kreuzungsvierecke* (auch *Vierecke mit überschlagenen Seiten* bzw. *Vierecke mit sich schneidenden Seiten* genannt).

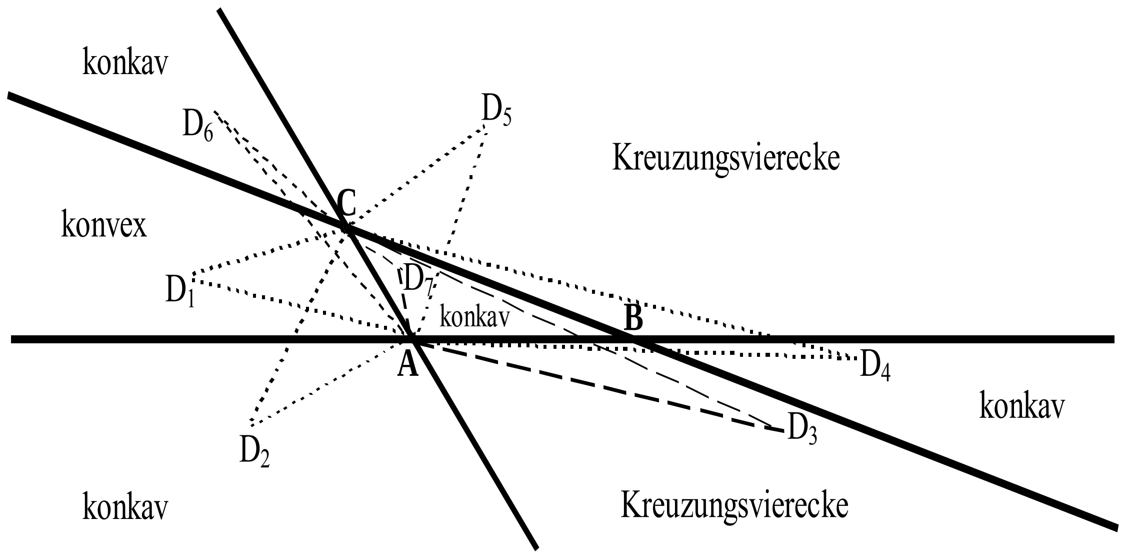


Dass nur diese drei Typen möglich sind kann man leicht durch ein paar systematische Überlegungen heraus bekommen:

Da das Viereck nicht-ausgerartet ist, bilden zunächst je drei Eckpunkte ein Dreieck. Wir können deshalb o.B.d.A. das Dreieck ABC als Ausgangspunkt unserer Überlegungen wählen.

Liegt der Punkt D nicht in der Ebene von ABC, so erhalten wir offensichtlich ein räumliches Viereck.

Liegt der Punkt D in der von ABC bestimmten Ebene, so kann D nicht auf einer der Geraden AB, AC, BC liegen, da das Viereck nicht-ausgeartet sein soll. Die durch ABC bestimmte Ebene wird nun mittels der Geraden AB, AC, BC in sieben Gebiete geteilt. Es sei jetzt D ein Punkt einer dieser sieben Teilgebiete. Man kann sich leicht klar machen, dass bei einer Wanderung von D innerhalb eines Gebietes sich nichts an der Lage der Seiten $\overline{CD}$ und $\overline{DA}$ gegenüber den Seiten des Dreiecks ABC ändert (es gibt keine bzw. keine weiteren Schnittpunkte). D.h. für alle D in einem Gebiet ändert sich der grundsätzliche Typus eines Vierecks nicht. Durch jeweils ein Beispiel ergibt sich dann leicht die folgende Verteilung:

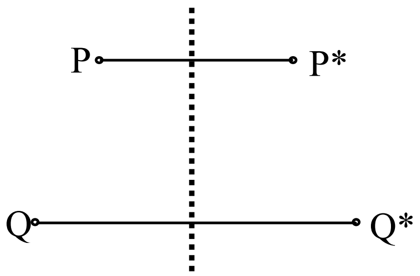


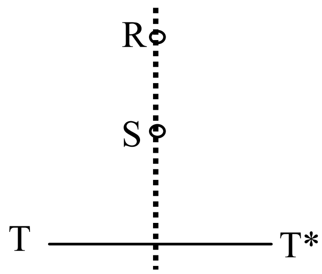
Damit ist klar geworden, dass es unter den nicht-konvexen Vierecken außer den räumlichen Vierecken nur konkave Vierecke oder Kreuzungsvierecke geben kann.

Symmetrische nicht-ausgeartete nicht-konvexe Vierecke

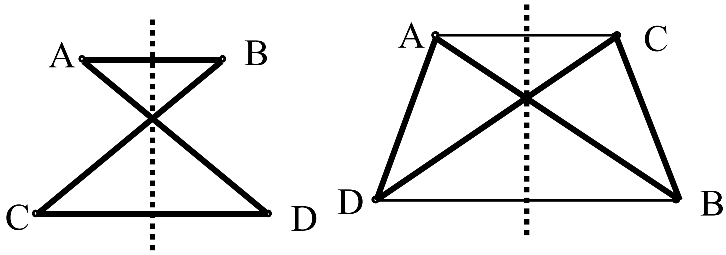
Das bekannte Haus der konvexen Vierecke kann bekanntlich gut anhand der Symmetrien und Schrägsymmetrien gefunden werden. Wir wollen hier Entsprechendes für nicht-konvexe Vierecke durchführen.

Ist etwa eine Symmetrieachse vorgegeben, so müssen die vier Punkte bezüglich einer Achsenspiegelung zwei Paare Punkt-Bildpunkt (P – P* und Q – Q*) bilden oder zwei Punkte (R, S) liegen auf der Achse und die übrigen beiden bilden ein Paar Punkt-Bildpunkt (T – T*).

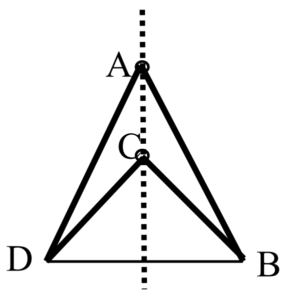




Die Punkte A, B, C, D eines beliebigen Vierecks müssen nun auf die Punkte P, P*, Q, Q* bzw. R, S, T, T* (bei der in dieser Reihenfolge fest gelegten Weise) in irgendeiner Weise verteilt werden. Bekanntermaßen gibt es sechs verschiedene Möglichkeiten der Reihung von vier Punkten, wenn man etwa beim Punkt A anfängt. (Man kann o.B.d.A. mit A anfangen, denn eine zyklische Vertauschung der vier Buchstaben ändert nichts an der Form des Vierecks sondern nur die Bezeichnungen der Eckpunkte.) Da das Rückwärtsdurchlaufen wie etwa bei ABCD und DCBA die Form des Vierecks nicht verändert, braucht man nur drei (im Sinne geometrischer Formen echt verschiedene) Belegungen untersuchen, wobei einige Belegungen keine symmetrischen Vierecke und einige symmetrische konvexe Vierecke liefern. Geht man nun systematisch alle möglichen Belegungen durch und sortiert die nicht-symmetrischen Vierecke aus, so erhält man die folgenden **nicht-konvexen achsensymmetrischen Vierecke**:

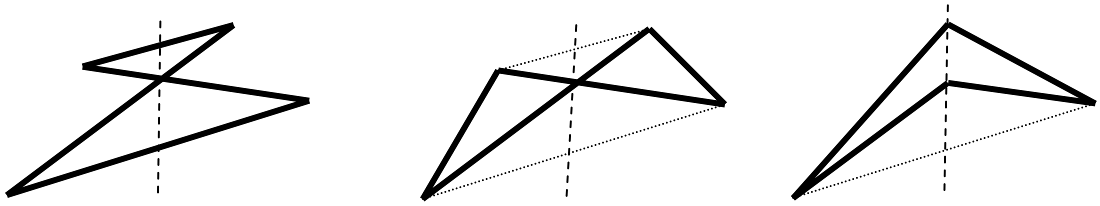


symmetrische Kreuzungsvierecke



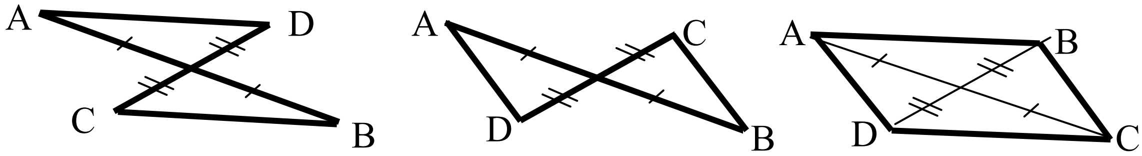
symmetrisch konkav

Ist eine Schrägsymmetrie vorgegeben, so gelten die gleichen Bedingungen wie bei der Achsensymmetrie, nur dass die Verbindung von Punkt und Bildpunkt nicht senkrecht zur Achse sein muss.

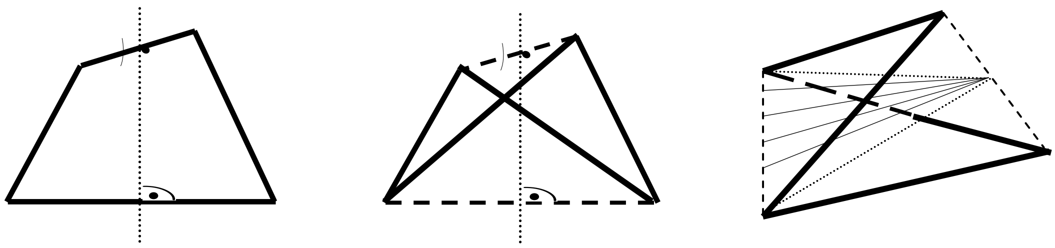


schrägsymmetrische Kreuzungsvierecke schrägsymm. konkaver Drachen

Ist eine Punktsymmetrie vorgegeben, so müssen sich die vier Eckpunkte in zwei Paare Punkt-Bildpunkt (P – P* und Q – Q*) bezüglich einer Punktspiegelung verteilen. Hierbei kann man dann wieder drei Fälle der Verteilung der Viereckspunkte unterscheiden und erhält neben dem konvexen Parallelogramm **ein punktsymmetrisches Kreuzungsviereck**.



Bei räumlichen Vierecken muss die sie tragende Dreieckspyramide auf sich abgebildet werden. Wie man leicht erkennt, ergibt sich eine Symmetrie für das Viereck auf der Dreieckspyramide entweder mit einer 180°-Drehung um eine Achse durch zwei Seitenmitten bzw. die Mitten der Diagonalen oder mit einer Ebenenspiegelung durch eine Diagonale und die Mitte der anderen Diagonalen, wobei diese senkrecht zu der Spiegelebene sein muss.



Nicht-konvexe ebene Vierecke mit zwei Symmetrieachsen (und einer Punktsymmetrie) sind nur Kreuzungsvierecke, deren vier Punkte ein „Rechteck“ bilden. (Der Sonderfall des „Quadrats“ ergibt hier keine zusätzliche Symmetrien – lediglich gleichlange Strecken und rechte Winkel im Kreuzungspunkt).

Räumliche Vierecke mit zwei oder mehr Symmetrien haben entweder drei 180°-Drehungen („verdrehtes Rechteck“) oder zwei Symmetrieebenen und eine Drehung („Viereck aus zwei kongruenten gleichschenkligen Dreiecken mit gleicher Basis und vier gleichlangen Seiten“). Sind darüber hinaus die beiden Diagonalen gleichlang, so treten die genannten Dreh- und Ebenensymmetrien sowie zwei Drehspiegelungssymmetrien auf. (Bei einem Viereck aus vier Seiten eines (regelmäßigen) Tetraeders kommen für das Viereck keine weiteren Symmetrien hinzu.)