Svenja GRUNDEY, Hamburg

Lehrerhandeln in Beweisprozessen im Mathematikunterricht: auf die richtige Balance kommt es an!

Begründen und Beweisen spielt sowohl in der Mathematik als auch in der Mathematikdidaktik eine wichtige Rolle. Diese Tatsache spiegelt sich beispielsweise in den prozessbezogenen Kompetenzen in den deutschen Bildungsstandards (2003) wider. Schwierigkeiten, die Schülerinnen und Schülern mit dem mathematischen Argumentieren und Beweisen haben, konnten in einer Vielzahl von Studien aufgezeigt werden (Reiss, Klieme & Heinze, 2001; Healy & Hoyles, 1998; Harel & Sowder 1998). An diese Ergebnisse schließt sich die Frage an, wie sich die Beweiskompetenz von Schülerinnen und Schülern fördern lässt. Einige erfolgreiche Methoden wie beispielsweise heuristische Lösungsbeispiele und Themenstudienarbeiten von Lernenden wurden bereits von Reiss et al. (Reiss, Klieme & Heinze, 2001) und Kuntze (2006) im Unterricht eingesetzt und evaluiert.

Der Konzeption meines Unterrichtsexperimentes liegt die Annahme zugrunde, dass die deduktive Methode als sozial konstruiert angesehen werden kann und die Frage nach der Gültigkeit von der jeweiligen sozialen Gruppe abhängig ist (Reid & Knipping S. 48ff.). Durch die Konfrontation mit prototypischen Schülerbeweisen wird den Lernenden ermöglicht, ein Beweisverständnis zu entwickeln, das einerseits an ihrem Vorwissen und ihren Vorstellungen anknüpft und andererseits von der Lerngruppe als soziale Gemeinschaft akzeptiert werden kann. Die Frage, welchen Einfluss das Lehrerhandeln in dieser Phase auf die Förderung der Beweiskompetenz, im Besonderen auf die Beweisvorstellungen in dem Unterrichtsexperiment hat, soll mit Hilfe der erhobenen Daten geklärt werden.

Konzeption des Unterrichtsexperiments und Untersuchungsmethode

Als Grundlage für die Konzeption des Unterrichtsexperimentes dienen empirische Ergebnisse aus der mathematikdidaktischen Literatur zum Thema „Beweisen“ (z.B. Healy & Hoyles 1998, Kuntze 2006). Im Zentrum des Unterrichtsexperimentes steht der Wechsel zwischen diskursiven Elementen und Phasen der Metareflexion und Eigenaktivität der Lernenden (Grundey, 2010). Als Ausgangspunkt dienen die aus dem vorangegangen Unterricht vorhandenen Kenntnisse der Schülerinnen und Schüler zu mathematischen Beweisen, die während des Unterrichtsexperimentes reflektiert, revidiert und ergänzt werden. Der Aspekt der Metareflexion spielt besonders in den Unterrichtsgesprächen eine entscheidende Rolle, beispielsweise bei der Entwicklung von Kriterien für mathematische Beweise im

Anschluss an die Diskussion über exemplarische Schülerbeweise, die prototypisch für bestimmte Beweisstrategien stehen (angelehnt an Healy & Hoyles 1998).

Die konzipierte Lernumgebung wurde in zwei deutschen Klassen der Jahrgangsstufe 10 und zwei kanadischen High School Kursen unterrichtet. Als Datengrundlage für die Evaluation des Unterrichtsexperimentes dienen sowohl die schriftlichen Lösungen der Schülerinnen und Schülern als auch Video- und Audioaufnahmen aus den Unterrichtsstunden und Interviews, die zum Abschluss mit einigen ausgewählten Lernenden und den Lehrpersonen Interviews geführt wurden.

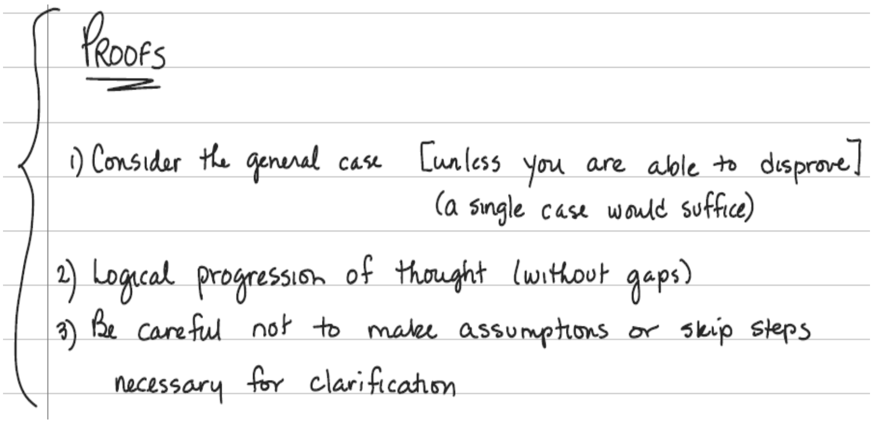
Ergebnisse

Zu Beginn des Unterrichtsexperimentes zeigte sich in allen vier Lerngruppen ein sehr homogenes, enges Bild bei der Beweisvorstellung, welches sich als „Beweisen als algebraisch – numerisches Verifizieren“ charakterisieren lässt (Grundey, 2010). Auf Grundlage der Diskussion über die exemplarischen Schülerbeweise als Prototypen für Beweisstrategien wurden in allen Lerngruppen im Unterrichtsgespräch Kriterien für mathematische Beweise entwickelt, wobei sich das Verhalten der Lehrpersonen und das Vorgehen in den Klassen und Kursen deutlich voneinander unterschieden haben.

Exemplarisch für ein sehr gelungenes Lehrerverhalten in dieser Phase bei der Förderung der Beweisvorstellung steht der folgende Auszug aus dem kanadischen Kurs H. In besonderer Weise gelang es der Lehrerin, im Anschluss an die Brainstormingphase, in der zunächst alle Schüleräußerungen gewürdigt wurden, an die Schülerantworten / -vorstellungen anzuknüpfen und gleichzeitig eine Brücke zu den Kriterien in der Mathematik zu schlagen (s. Tabelle 1).

Proofs
Title 3/25/2010

applies to all cases
can't leave anything out (show all steps)
steps should progress logically
shouldn't make big assumptions.
Show restrictions
Statement / conclusion at end.
IF, THEN, BECAUSE
Generalization rather than specific numbers / cases.



PROOFS

1) Consider the general case [unless you are able to disprove]
(a single case would suffice)

2) Logical progression of thought (without gaps)

3) Be careful not to make assumptions or skip steps necessary for clarification

Tabelle 1: Tafelbild zu den entwickelten Kriterien im Kurs H (aus der Brainstorming Phase (oben) und der Phase der Fokussierung durch die Lehrerin (unten))

Durch die Fokussierung der Lehrerin auf die logisch – deduktive Art des Schließens in mathematischen Beweisen scheint bei den Lernenden der theoretische Begriff ausgeschärft und mit Sinn gefüllt zu werden. Dieser positive Einfluss zeigt sich beispielsweise bei Charlotte (Kurs H).

VORHER: Frage: What is a mathematical proof for you?	***NACHHER: Frage: What is a mathematical proof for you?***
Charlotte: A mathematical proof is a series of steps that shows how a mathematical equation or statement came to be true.	A mathematical proof is a series of logical steps that clearly shows how a statement is true. It must be generalized and no assumptions must be made.

Im Gegensatz zum beschriebenen Ablauf im Kurs H hat die Lehrperson im kanadischen Kurs C im Anschluss an die Brainstormingphase die Schülerantworten nicht weiter strukturiert (s. Tabelle 2), obwohl die Schülerantworten ebenfalls von der Lehrerin auf die logisch – deduktive Art des Schließens als charakteristisches Kriterium für Beweise hätten fokussiert werden können.

Criteria:

- step by step
- mathematically sound
- structure, order
- simple wording
- using formulas
- variables
- solves for <u>all</u> functions
- (not specific examples)
- show any restrictions
- helpful to have comment or explanations

Tabelle 2: Tafelbild zu den entwickelten Kriterien im Kurs C (aus der Brainstorming Phase)

Durch diese fehlende Fokussierung und Strukturierung der Schülerantworten scheinen die Schülerinnen und Schüler aus dem Kurs C größere Schwierigkeiten zu haben, den Begriff des mathematischen Beweises auszuschärfen und ihre anfängliche Beweisvorstellung zu erweitern. Exemplarisch für diese Problematik stehen die folgenden Antworten von Jean, die sich im Gegensatz zu Charlotte auf die Art der äußeren Darstellung und nicht auf die logische Struktur in mathematischen Beweisen beziehen.

VORHER: Frage: What is a mathematical proof for you?	***NACHHER: Frage: What is a mathematical proof for you?***
Jean: *Showing or being able to prove that a mathematical statement or equation is true.*	*A mathematical proof shows that a given statement is true for any given function or value by using variables and giving thorough explanation.*

Diskussion

Insgesamt zeigen die Ergebnisse, dass sich die Ausgewogenheit im Lehrerverhalten im Kurs H in der Phase der Entwicklung von Kriterien für mathematische Beweise besonders förderlich auf die Ausschärfung des theoretischen Begriffs des mathematischen Beweises auszuwirken scheint. Der kanadischen Lehrerin im Kurs H gelingt es in besonderer Weise, sowohl eine Brücke zwischen den Schülervorstellungen/ -antworten und den Kriterien in der Mathematik zu schlagen als auch den Lernenden genügend Raum für ihre Ergebnisse und Vorstellungen zu geben. Durch eine fehlende Strukturierung in dieser Phase scheint sich wie im Kurs C beschrieben die Beweisvorstellung wie zu Beginn bei den Schülerinnen und Schülern eher auf die äußere Art der Darstellung als auf die logisch – deduktive Art des Schließens zu beziehen, welches sich mit Ergebnissen bei Harel & Sowder (1998) deckt.

Literatur

Grundey, S. (2010): Eigenständige Beweisaktivitäten im Mathematikunterricht – Schülervorstellungen und Kompetenzen. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 2010, 361 – 364, WTM – Verlag, Münster.

Harel, G.; Sowder, L. (1998): Students' Proof Scheme: Results from Exploratory Studies. In: CBMS Issues in Mathematics Education, American Mathematical Society, 7, 234-283.

Healy, L.; Hoyles, C. (1998): Justifying and Proving in School Mathematics. Technical Report on the Nationwide Survey, 1998.

Kuntze, S. (2006). Themenstudienarbeit – Konzeption einer Lernumgebung für den gymnasialen Mathematikunterricht und Evaluation einer Themenstudienarbeit zum mathematischen Beweisen und Argumentieren. [Dissertation]. München: LMU.

Reid, D. A.; Knipping C. (2010): Proof in Mathematics Education. Research, Learning and Teaching. Sense Publishers, Rotterdam.

Reiss, K.; Klieme, E. & Heinze, A. (2001): Prerequisites for the Understanding of Proofs in the Geometry Classroom. Proceedings of the 25th Conference for the Psychology of Mathematics Education. Utrecht.