

Corinna HÄNISCH, Aachen

## **Denkformen des formalen Denkens – Eine empirische Studie zur spezifischen Kognition von Studienanfängern im Fach Mathematik**

Im Wintersemester 2009/2010 wurde an der RWTH Aachen eine qualitative Studie mit Studienanfängern durchgeführt, mit dem Ziel, den Schritt von der Schul- zur Hochschulmathematik näher zu beleuchten. Insbesondere wurden Schwierigkeiten beim Übergang zur formalen Hochschulmathematik untersucht, die in dieser Form für Erstsemester unbekannt ist.

Dazu wurden insgesamt fünf Leitfadeninterviews zu unterschiedlichen mathematischen Themen (Mengenlehre, Vollständige Induktion, Abbildungen, Relationen, Gruppen) geführt, die für die spätere Auswertung darüber hinaus videografiert wurden. Die Interviews lehnten sich inhaltlich an die Pflichtveranstaltung „Mathematische Grundlagen“ an, wobei die Interviews zeitlich nach der Behandlung des jeweiligen Themas in der Veranstaltung durchgeführt wurden. Die Veranstaltung Mathematische Grundlagen wurde mit der Einführung des Bachelor-Studiengangs Mathematik speziell als Brückenveranstaltung von der Schul- zur Hochschulmathematik konzipiert. Insgesamt haben an der Hauptstudie zwölf Studierende teilgenommen, wobei die eine Hälfte in den Studiengang Bachelor Mathematik und die andere in den Lehramtsstudiengang Mathematik für Gymnasien und Gesamtschulen eingeschrieben ist.

### **Kategorien der Analyse**

Die von uns erarbeiteten Kriterien der Analyse orientieren sich an dem gewünschten umfassenden Verständnis eines mathematischen Begriffs. Hierzu gehören nach unserer Auffassung neben der formalen Definition formale Fertigkeiten, Veranschaulichungen, ein umfassender Vorrat an Beispielen bzw. Gegenbeispielen und Verknüpfungen zu anderen Wissensgebieten. Daraus ergeben sich für die Analyse die drei Oberkategorien *Fehlvorstellungen*, *Formale Fertigkeiten* und *Veranschaulichungen*.

*Fehlvorstellungen*: Das Verständnis mathematischer Begriffe wird durch bereits vorhandene Wissens Elemente beeinflusst. Gerade bei dem Interview zum Thema Abbildungen, das im Folgenden etwas ausführlicher dargestellt wird, war davon auszugehen, dass jeder Studienanfänger bereits aus der Schule ein gewisses Vorverständnis hierzu mitbrachte. Durch die Interviews sollte nun das vorhandene mentale Modell (vgl. Johnson-Laird 1983, S. 2) und zugehörige Fehlvorstellungen der Studierenden näher untersucht

werden. Unter Fehlvorstellungen werden hierbei sowohl falsche Vorstellungen als auch Wissenslücken gefasst.

*Formale Fertigkeiten:* Die formal-syntaktische Ebene mit der Möglichkeit der inhaltslosen Regelanwendung ist ein Charakteristikum der Mathematik. Neben formalen Umformungen soll an dieser Stelle allerdings auch noch die Fähigkeit des Formalisierens und das Verständnis formaler Ausdrücke in den Fokus gerückt werden. Hierzu wurde in den Interviews neben kurzen formalen Beweisen an mehreren Stellen nach der Quantorenschreibweise oder dem Verständnis einer bisher unbekannt formalen Definition gefragt, so dass alle drei Fähigkeiten im Bereich der formalen Fertigkeiten näher beleuchtet werden konnten.

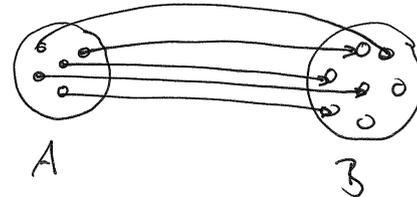
*Veranschaulichungen:* Hierbei wird unterschieden zwischen exemplarischen Veranschaulichungen und generischen Veranschaulichungen, die eine exemplarische Eigenschaft verdeutlichen. Für beide Arten kann nach Bruner zwischen ikonischen und symbolischen Veranschaulichungen unterschieden werden. So gehören beispielsweise im Bereich Abbildungen sowohl Graphen als auch Abbildungsvorschriften zu den exemplarischen Veranschaulichungen. Veranschaulichungen können von den Studierenden an den unterschiedlichsten Stellen verwendet werden, aber ein besonderes Augenmerk wurde auf jene beim Einstieg in ein neues Themengebiet gelegt. Die Einstiegsfrage wurde immer bewusst allgemein gestellt („Was ist eine Abbildung“), so dass den Studierenden nicht vorgegeben wurde, für ihre Erklärungen die formale Definition oder z. B. eine Veranschaulichung zu wählen.

### **Einige Ergebnisse aus den Interviews zum Thema Abbildungen**

Das dritte der insgesamt fünf Interviews beschäftigte sich mit dem Thema Abbildungen. Zuerst wurde allgemein über Abbildungen gesprochen. Obwohl die Art des Einstiegs den Studierenden selbst überlassen wurde, sollten am Ende sowohl die formale Definition als auch Beispiele und Veranschaulichungen besprochen worden sein. Danach wurden die Begriffe Injektivität, Surjektivität und Bijektivität behandelt, wobei auch Aufgaben gestellt wurden, die über die zuvorige Behandlung in der Veranstaltung hinausgingen. Am Ende der Interviews wurde, wie in allen fünf Interviews, etwas bisher Unbekanntes besprochen; in diesem Fall die Monotonie. Es war zwar davon auszugehen, dass Begriffe wie monoton steigend bereits aus der Schule bekannt waren, aber hier erfolgte der Einstieg über die formale Definition, wobei eine passende Wortmarke von Seiten der Studierenden zu ergänzen war.

Im Folgenden werden einige exemplarische Ergebnisse des Interviews vorgestellt. Besonders während der Erklärungen zu den Begriffen Injektivität, Surjektivität und Bijektivität kommen Lücken zum Vorschein. Als beispielsweise Sw1 eine Veranschaulichung zu dem Begriff Injektivität zeichnet, erklärt sie ihr Konzept hierzu wie folgt:

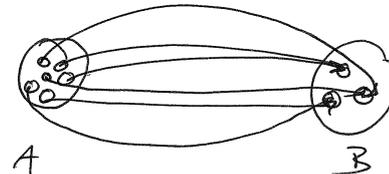
Sw1: Also wenn es injektiv ist, dann bilde ich hier jedes Element auf genau ein Element ab und dann hab ich halt hier noch Elemente auf die nichts abgebildet wird.



Das entscheidende Merkmal einer injektiven Abbildung, dass jedes Element des Zielbereichs höchstens einmal angenommen wird, kommt in der Erklärung von Sw1 nicht vor. Insofern ist ihr Konzept unvollständig und teilweise auch falsch, da sie hier heraushebt, dass die Abbildung nicht surjektiv ist. Im ersten Teil betont sie die Wohldefiniiertheit der Abbildung ("dann bilde ich hier jedes Element auf genau ein Element ab"); für sie scheint dies ein entscheidendes Charakteristikum für eine injektive Abbildung zu sein.

Ähnliche Schwierigkeiten zeigt die gleiche Studentin auch bei der Surjektivität.

Sw1: Wenn 's, öh, surjektiv ist, dann bilde ich halt z. B. auf ein Element mehrmals ab.



Hier wird die Tatsache, dass ein Element des Zielbereichs mehrmals getroffen werden kann, in den Fokus gerückt („nicht Injektivität“) und dies scheint das dominierende Element des Konzepts von Sw1 zu sein. Diese Fokussierung ist insofern nicht hilfreich, da das entscheidende Merkmal, dass alle Elemente des Zielbereichs mindestens einmal getroffen werden müssen, nicht genannt wird. Stattdessen nennt sie eine Eigenschaft, die nicht auf alle surjektiven Abbildungen zutrifft, siehe beispielsweise den Spezialfall einer bijektiven Abbildung.

Für die Studentin scheinen Injektivität und Surjektivität zwei komplementäre Eigenschaften einer Abbildung zu sein. Diese These lässt sich auch dadurch stützen, dass die Studentin im weiteren Verlauf des Interviews die Frage, ob es Abbildungen gebe, die nicht injektiv und nicht surjektiv sind, zuerst verneint.

Nach der Behandlung der Quantorenschreibweise der drei Begriffe werden den Studierenden formale Ausdrücke vorgelegt und nach einem möglichen Bezug zum bisher Besprochenen gefragt.

$$\forall x_1, x_2 \in M : x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$$

Sw2: Wir haben das anders rum gesagt, würde sagen, dass das auch injektiv ist.

Mehrere Studierende bezeichnen diesen Ausdruck als Definition der Injektivität, aber gerade bei Sw2 wird deutlich, dass die veränderte Pfeilrichtung nicht lediglich durch zu oberflächliches Hinsehen unbemerkt bleibt. An dieser Stelle hat sie Zeit, sich den Ausdruck in Ruhe anzuschauen, so dass der Schluss nahe liegt, dass sie einen solchen formalen Ausdruck mit einer Folgerungsbeziehung nicht korrekt interpretieren kann. Anderen Studierenden hingegen ist der Unterschied bewusst und sie erläutern direkt den Unterschied zur Injektivität. Allerdings zeigen sich Probleme beim Verständnis von Implikationen auch an anderen Stellen, so dass dies eine Schwierigkeit für Erstsemester zu sein scheint.

### **Funktionale und prädikative Denkstile**

Es soll untersucht werden, inwieweit eine Präferenz für funktionales bzw. prädikatives Denken nach Schwank Einfluss auf den Umgang mit dem formalen Zugang zur Mathematik in der Hochschule hat. Hierzu wird untersucht, ob z. B. Erklärungen oder Veranschaulichungen Indizien für einen der beiden Denkstile enthalten. Für die Klassifizierung wurden am Ende des ersten Interviews neun QuaDiPF-Aufgaben durchgeführt (vgl. Schwank 1999/2000). Hierbei zeigte sich, dass bei den Teilnehmern sowohl Präferenzen für einen prädikativen als auch für einen funktionalen Denkstil erkennbar sind. Entsprechend den Ergebnissen aus vorherigen Studien wurde eine Präferenz für einen funktionalen Denkstil häufiger bei den männlichen Teilnehmern und für einen prädikativen bei den weiblichen festgestellt (vgl. Schwank 2003). Allerdings benutzte ein männlicher Bachelor-Student lediglich prädikative Erklärungsmuster bei allen Aufgaben.

### **Literatur**

- Johnson-Laird, P. N. (1983): *Mental Models: Towards a cognitive science of language, inference, and consciousness*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Schwank, I. (1999/2000): *QuaDiPF – Qualitatives Diagnoseinstrument für prädikatives versus funktionales Denken*. Sets A/B/C/D. Osnabrück: Forschungsinstitut für Mathematikdidaktik.
- Schwank, I. (2003): *Einführung in funktionales und prädikatives Denken*. In I. Schwank: *ZDM-Themenheft 'Zur Kognitiven Mathematik'*, ZDM 35(3), 70-78