Stefan HEILMANN, Universität zu Köln

Schätzen: Ein Zugang zur Mathematischen Statistik

1. Motivation

In Schulbüchern, wie z.B. LS Stochastik, Elemente der Mathematik oder Mathematik Stochastik, hat sich der Umgang mit Hypothesentests bzw. Bereichsschätzern zur Thematik Mathematische Statistik etabliert. Punktschätzung findet nur am Rande statt. Effizienzbetrachtungen werden nicht vollzogen. Dabei bietet die Punktschätzung elementare Möglichkeiten in die Mathematische Statistik einzuführen. In diesem Vortrag sollen die Grundideen der Mathematischen Statistik exemplarisch am Versuch *Werfen einer Reißzwecke* mittels Punktschätzung aufgezeigt werden.

2. Reißzweckenwurf

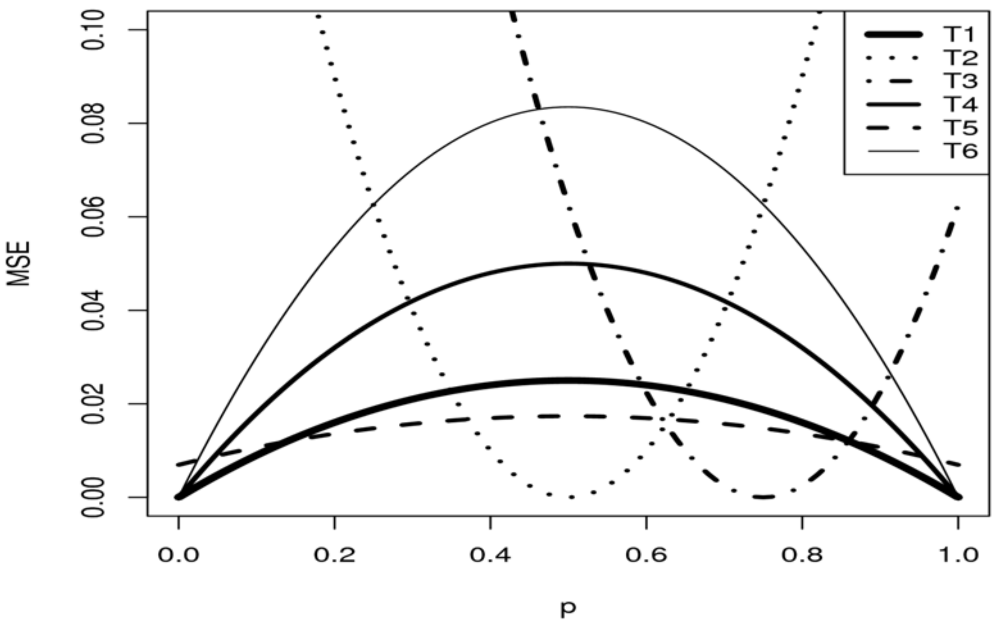
Werfen wir eine Reißzwecke, so wissen wir, dass nur die beiden Ergebnisse *Dorn schräg* oder *Dorn steil* möglich sind. Aber wir kennen die Wahrscheinlichkeit p für *Dorn schräg* nicht. Wir gehen aber davon aus, dass es solch ein p gibt. Unser Ziel ist es nach n-maligem Werfen einer Reißzwecke einen zutreffenden Wert für p zu ermitteln. Das Auffinden von p wollen wir durch einen Schätzer realisieren. Wir codieren *Dorn schräg* mit 1 und *Dorn steil* mit 0. Als Stichprobe erhalten wir nach n Würfen ein n-Tupel aus der Menge $X=\{0,1\}^n$. Auf Grundlage einer solchen Stichprobe wollen wir nun eine Zahl, die $p \in (0,1)$ zutreffend beschreibt, angeben, d.h. wir ordnen einer Stichprobe eine Zahl aus einer Menge D, die (0,1) umfasst, zu. Eine solche Zuordnung nennen wir Schätzer. Damit ist das geeignete Objekt für einen Schätzer T eine Funktion $T{:}X\to D$ (Witting, 1985, S. 11). Ein Kandidat für solch einen Schätzer wäre somit die relative Häufigkeit $T_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ für $(x_1, x_2, ..., x_n) \in X$. Jedoch ist für den Fall, dass der Reißzweckenwurf fair, d.h. $p=\frac{1}{2}$ wäre, die relative Häufigkeit bei ungerader Wurfanzahl schlechter als der konstante Schätzer $T_2 = \frac{1}{2}$. Um die Frage nach der Wahl eines besten Schätzers zu beantworten geben wir sechs mehr oder weniger plausible Schätzer an und versuchen Kriterien zu bestimmen, anhand derer wir einen besten Schätzer ausfindig machen können. Die weiteren Schätzer sind $T_3 = \frac{3}{4}$, $T_4 = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} x_i$ mit Zahlen $m < n$, $T_5 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i + 1}{n+2}$ und $T_6 = \sum_{i=1}^{n} w_i x_i$ mit $w_i = \frac{2^{n-i}}{2^n - 1}$.

Nun werden wir die Schätzfehler mit der Gauß'schen Verlustfunktion s(T,p)=(T-p)^2 messen (Witting, 1985, S.12). Diese Verlustfunktion ist nicht negativ, nimmt für T=p den Wert 0 an, besitzt dort ein absolutes Minimum und ist als Funktion von p stetig differenzierbar. Nun ist jedoch der Schätzfehler eines Schätzers nicht unabhängig von der Wahl der Stichprobe. Deswegen gehen wir zum mittleren quadratischen Fehler

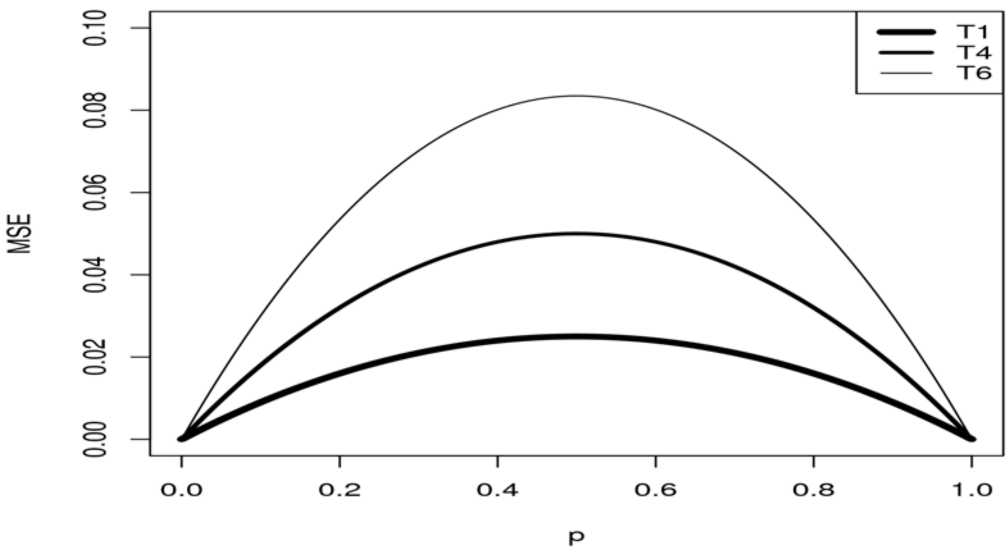
MSE T = E s(T,p)

über (Witting, 1985, S.13). Durch die Erwartungswertbildung hängt der MSE T nun nicht mehr von der Wahl der Stichprobe ab. Damit haben wir ein Vergleichskriterium für Schätzer gefunden.

Die folgende Abbildung zeigt die mittleren quadratischen Fehler unserer sechs Schätzer.



Jedoch sehen wir, dass wir die Schätzer nicht vergleichen können. Betrachten wir die Eigenschaft der Erwartungstreue, d.h. für einen Schätzer T gilt ET=p. Damit ist klar, dass ein erwartungstreuer Schätzer von der Stichprobe abhängen muss. Die Schätzer T_1, T_4 und T_6 sind erwartungstreu, die anderen nicht. Nichterwartungstreue können wir als systematisches Über- bzw. Unterschätzen auffassen und schließen deswegen die nichterwartungstreuen Schätzer von weiteren Betrachtungen aus. Für erwartungstreue Schätzer gilt MSE T = Var T. Die nachfolgende Abbildung zeigt die Varianzen der erwartungstreuen Schätzer T_1, T_4 und T_6 . Weiter sehen wir, dass die relative Häufigkeit T_1 ein bester Schätzer unter den drei Schätzern T_1, T_4 und T_6 ist.



Wünschenswert wäre es nun nachzuweisen, dass T_1 ein bester Schätzer unter allen erwartungstreuen Schätzern ist. Dieses können wir dadurch realisieren, dass wir die Rao-Cramer-Schranke (Georgii, 2002, S. 212) für unsere Situation bestimmen. Sie lautet hier: Für jeden erwartungstreuen Schätzer T für p gilt

$$\mathrm{Var}\, T \geq \frac{p(1-p)}{n}.$$

Für den Beweis wird lediglich Oberstufenanalysis benötigt. Die Varianz der relativen Häufigkeit nimmt genau die Varianz der Rao-Cramer-Schranke an. Somit ist T_1 ein bester Schätzer unter allen erwartungstreuen Schätzern. Für weitere Betrachtungen siehe (Georgii, 2002, S.193f).

3. Ausblick

Anhand des Beispiels *Werfen einer Reißzwecke* haben wir die Grundideen zur Bestimmung effizienter Punktschätzer kennen gelernt. Diese sind:

- Angabe der Art unserer Entscheidung. Hier ist die Entscheidung eine Zahl.
- Definition eines Schätzers durch eine Funktion
- Quantifizierung von Schätzfehlern durch die Gauß'sche Verlustfunktion

- Bestimmung des mittleren quadratischen Fehlers als Gütekriterium für einen Schätzer
- Erkennen der Nicht-Existenz eines besten Schätzers
- Reduktion auf erwartungstreue Schätzer
- Bestimmung eines besten Schätzers in der reduzierten Klasse

Diese Grundideen können mit anderen Vokabeln und anderen Sätzen auf die Entwicklung bester Hypothesentests übertragen werden (Witting, S.35f, S. 188f).

Hypothesentests sind sicherlich relevanter für den Praxisalltag. Soll deren Einführung auch kritisch nachvollzogen werden und der Stochastikunterricht über das bloße Anwenden hinausgehen, so sind sie schwerer zu verstehen. Aber der Zugang über die Punktschätzung ermöglicht einen anschaulichen Einblick in die Mathematische Statistik. Die Begrifflichkeit ist verständlicher und einsichtiger. Durch die Beschränkung auf Beispielen wie den Reißzweckenwurf, d.h. Beschränkung auf die Bernoulli-Verteilung, wird zur Herleitung eines besten Schätzers nur Oberstufenmathematik benötigt.

Literatur

Baum, M., Brandt, D., Lind, D., Riemer W., Zimmermann P. (2003): LS Stochastik. Stuttgart: Klett

Georgii, H.-O. (2002): Stochstik. Berlin: de Gruyter

Griesel, H., Postel, H., Suhr F. (2003): Elemente der Mathematik, Stochastik Leistungskurs. Braunschweig: Schroedel

Jahnke, T., Wuttke, H. (2005): Mathematik Stochastik. Berlin: Cornelsen

Witting, H. (1985): Mathematische Statistik I. Stuttgart: Teubner