

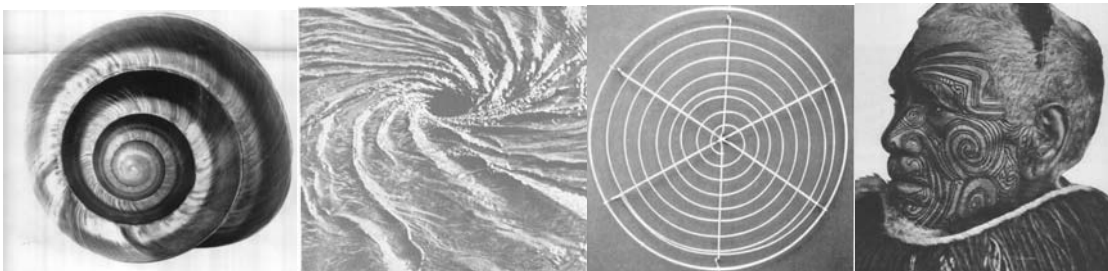
Johanna HEITZER, Aachen

## **Spiralen – Ebene Kurven bereichern Mathematikgeschichte und Unterricht**

Dieser Beitrag behandelt ein Thema, über das ich vor siebzehn Jahren erstmals gearbeitet und seitdem mit unterschiedlichen Schwerpunkten immer wieder veröffentlicht oder vorgetragen habe. Das sagt vielleicht nichts Gutes über mich, sicher aber über das Thema: Denn jedesmal geschah es mit Freude, neuem Erkenntnisgewinn und sehr positiver Resonanz.

Warum hier noch einmal? Zum einen war der Spiralvortrag in Freiburg der erste im größeren mathematikdidaktischen Kreis. Zum anderen stimmt das Verhältnis zwischen Multiplikatorwirkung und Zugänglichkeit der Quellen nicht. Das Buch war schnell vergriffen und wurde nicht wieder aufgelegt. Seitdem aber sind zahlreiche schulische Facharbeiten und Staatsexamensarbeiten zum Thema geschrieben, Seminare an Universitäten gehalten, Exkurse in Schulbücher integriert und die Materialien in unterschiedlichsten Projekten erprobt worden. In Sachsen sind Spiralen in den Wahlpflichtbereich des gymnasialen Lehrplans eingegangen.

Natürlich bin ich bei weitem weder die einzige noch die erste Autorin zum Thema (siehe die Literaturliste in Heitzer, 1998, und die hier genannten neueren Veröffentlichungen). Doch steht meine dank Heinrich Winter erfolgte, gründliche didaktische Aufbereitung offenbar am Anfang einer Renaissance des Themas im deutschsprachigen Raum. Ich habe die letzten eigenen Exemplare des Buches sicher fünfzigmal vertrauensvoll verliehen und werde dies weiter tun: [johanna.heitzer@matha.rwth-aachen.de](mailto:johanna.heitzer@matha.rwth-aachen.de)



### **Fachübergreifender, fachhistorischer und fachlicher Hintergrund**

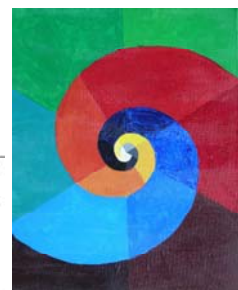
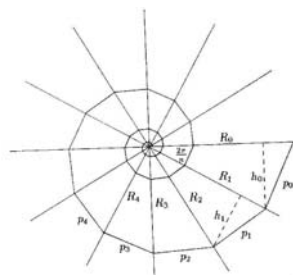
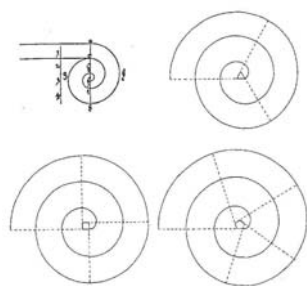
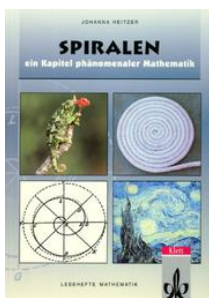
Spiralen sind ein an Vielfältigkeit und Beziehungsreichtum außergewöhnliches Phänomen unserer Lebenswelt. Sie kommen in der Natur und in der Technik; in der Kunst praktisch jedes Kulturkreises und jeder Epoche vor – oft mit starker symbolischer Bedeutung. Bei eingehender Betrachtung führt das Spiralphänomen fast zwingend zu mathematischen Begriffen und Me-

thoden. Umgekehrt lassen sich mit diesen die Fragen nach dem Wie und Warum der Spiralen am besten beantworten.

Tatsächlich haben Spiralen die Mathematikgeschichte extrem bereichert. Sie waren in bedeutenden Entwicklungsphasen Gegenstand des Interesses großer Mathematiker und zählten insbesondere zu den konkreten Objekten, an denen der Infinitesimalkalkül entwickelt und erprobt wurde. Archimedes, Pappos, Galilei, Cavalieri, Torricelli, Fermat, Pascal, Descartes, Jakob Bernoulli und Newton sind nur einige der wichtigsten Namen.

Als Spiralen im engeren Sinn bezeichnet man in der Mathematik ebene Kurven, die aus unendlichen vielen Windungen um einen festen Punkt bestehen und aus höchstens zwei Ästen mit streng monotonem Zusammenhang zwischen Drehwinkel und Radius zusammengesetzt sind. Das geeignetste Mittel zur Beschreibung von Spiralen sind Polarkoordinaten, denn dort sind Spiralen die Graphen der einfachsten streng monotonen: Schülern aus der kartesischen Deutung gut vertraut als Gerade, Parabel, Wurzelfunktion, Hyperbel, Exponentialfunktion und so weiter.

Die einzelnen Spiralen haben hoch interessante geometrische Eigenschaften. Teils lassen sich diese mit elementaren Mitteln entdecken und beweisen. Sie führen auf diskrete und stetige Näherungskonstruktionen, anhand derer sich wichtige Fertigkeiten der SekI-Geometrie auf das attraktivste schulen und Erkenntnisse veranschaulichen lassen. Teils betreffen sie die analytischen Grundfragen an Kurven: Tangente, eingeschlossene Fläche, Bogenlänge. Hier stellt die Übertragung wichtiger Sätze und Methoden auf Polarkoordinaten einen gehaltvollen Transfer für die SekII dar. Wesentliche Grundideen wie Superpositionsprinzip, Grenzwert und infinitesimaler Übergang können auf neue Weise repräsentiert und durchdrungen werden.



### Vorschläge zur Behandlung in der Unter- und Mittelstufe

Für die Sekundarstufe I bieten sich vor allem synthetische Auseinandersetzungen mit dem Spiralmotiv an: Entweder bilden Spiralen aus der Erfahrungswelt der Schüler den Ausgangspunkt modellierender Zugänge, bei denen die reale Form durch geometrische Konstruktionen simuliert werden

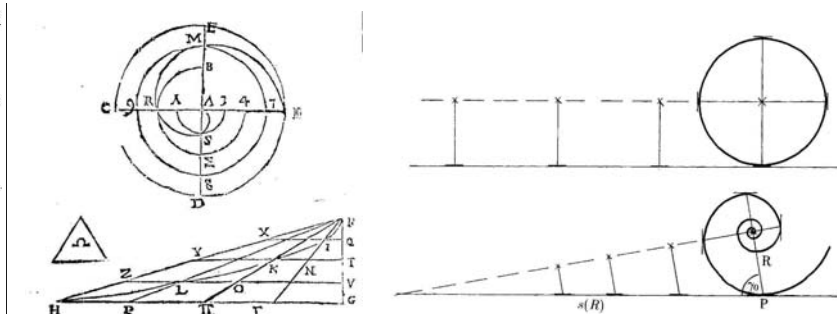
soll, oder vorgegebene iterative Konstruktionsvorschriften führen ‚nebenbei‘ auf Spiralen. Dabei können wichtige curriculare Kenntnisse und Fertigkeiten sinnstiftend geübt und vertieft werden: Messen von Längen und Winkeln, Konstruieren mit Zirkel und Lineal, Abzähl- und Rechenverfahren, Winkelsätze, Ähnlichkeit, arithmetische und geometrische Progression, Pythagoras und vieles mehr. Wichtige Stichworte sind:

- die Wurzelspirale, nach der Theodorus mittels des Satzes von Pythagoras die Quadratwurzeln der natürlichen Zahlen bis 17 konstruierte,
- (z.B. nach Dürer) aus Kreisbögen zusammengesetzte n-Eck-Spiralen und die Kreisevolvente, auf die manchen Anwendungsaufgabe führt,
- durch Abtragen eines immer gleichen Winkels im Polarkoordinatengitter gewonnene Polygonnäherungen der logarithmischen Spirale,
- goldene Spiralen, die durch sukzessiver Zusammensetzung von Kreisbögen im goldenen Rechteck oder goldenen Dreieck entstehen,
- Phänomene der Phyllotaxis, bei denen Fibonacci-Zahlen von Spiralen in Fruchtständen sichtbar werden (Blattstellung, exp. Wachstum).

### Vorschläge zur Behandlung in der Oberstufe

In der Sekundarstufe II stehen analytische Fragen im Mittelpunkt und die algebraische Beschreibung der Spiralen durch in Polarkoordinaten gedeutete Funktionsterme kommt wesentlich hinzu. Allein dieser Transfer ermöglicht einen gehaltvollen und Verständnis erweiternden zweiten Blick auf grundlegende Inhalte des Curriculums. Wichtige Stichworte sind:

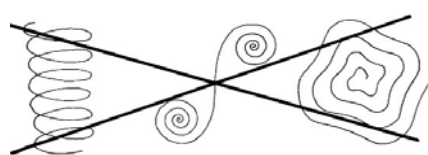
- explorative Auseinandersetzungen mit dem Zusammenhang zwischen Term und Graph in Polarkoordinaten unter Nutzung von CAS,
- Transfer der analytischen Formeln für Tangente, Fläche, Bogenlänge, Krümmungsradius auf Polarkoordinaten: Erweiterung und Vertiefung,



- wichtiger Vorstufen analytischer Beweise nach historischem Vorbild (Superposition, Prinzip des Cavalieri, „Gerademachen“ im Kleinen),
- Revision geometrischer Reihen, Grenzwert- und Endlichkeitsbegriff.

## Spiralen, Kompetenzen, Diagnose und Förderung

Die mathematische Auseinandersetzung mit Spiralen führt zur Förderung von drei der vier übergeordneten inhaltsbezogenen Kompetenzen des Mathematikunterrichts: Geometrie, Funktionen, Arithmetik / Algebra. Wegen der Vielfalt an möglichen Zugängen und Abstraktionsniveaus lassen sich am Spiralphänomen sämtliche prozessbezogenen Kompetenzen schulen: Argumentieren / Kommunizieren, Problemlösen, Modellieren, Werkzeuge. Die Diagnose von Wissenslücken, Fehlvorstellungen, Stärken und Interessen erfolgt in diesem beziehungsreichen Kontext nebenbei statt als verordneter Selbstzweck. Auch individuelle Förderung wird so sehr einfach.



## Literatur

- Davis, Ph.J. / Gautschi, W. / Iserles, A. (2001): *Spirals. From Theodorus to Chaos*. Boca Raton: CRC Press.
- Freudigmann, H., u. a. (2002): *Lambacher Schweizer Analysis Leistungskurs (Spiralen S.170-171)*. Stuttgart: Klett.
- Gächter, A. (2000): *Spuren der Mathematik – Spiralen*. Aktuell 4|29, St.Gallen: Kant.
- Groh, N. / Henning, H. (2011): *Spiralen in Kunst und Natur – ein mathematisches Phänomen für „vernetztes“ Lernen*. In: *MNU Tagungsband, 102*.
- Heitzer, J. (1998): *Spiralen – ein Kapitel phänomenaler Mathematik*. Leipzig: Klett.
- Heitzer, J. (2002): *Mathe-Welt „Spiralen“*. In: *mathematik lehren, 111, 23-46*.
- Heitzer, J. (2005): *Kurven als attraktiver und substanzieller Unterrichtsgegenstand*. In: *mathematik lehren, 130, 4-7*.
- Heitzer, J. (2005): *Spiralen kreieren! Ebene und räumliche Spiralen in Parameterdarstellung*. In: *mathematik lehren, 130, 20-22 & 47*.
- Heitzer, J. (2007): *Spiralen in Kunst und Mathematik*. In: *Ausgerechnet – Mathematik und konkrete Kunst!* Würzburg, Kulturspeicher.
- Heitzer, J. / Jacobs, W. (2009): *Kunst mit Kurven – kreative Erfahrungen mit Regelmäßigkeit*. In: *mathematik lehren, 157, 43-48*.
- Knichel, H. (1998): *Spiralen. Ein fächerübergreifender Zugang in einer siebten Klasse*. In: *Der Mathematikunterricht, 4-5, 22-37*.
- Rösler, J. (1994): *Geometrie ebener Spiralen als Erfahrungs- und als Erprobungsgebiet von Begriffsbildungen der Analysis*. Aachen, Hochschulschriften.
- Sächsisches Staatsministerium für Kultus (2004): *Lehrplan Gymnasium Mathematik (Spiralen im Wahlpflichtbereich Parameterkurven S.32)*. Dresden: Saxoprint.
- Vollrath, H.-J. (1997): *Ein etwas andere Zirkel*. In: *DMV-Mitteilungen, 1, 28*.