Angela HERRMANN, Essen

Beweisen in der Linearen Algebra – typische Schwierigkeiten von Studierenden im ersten Studienjahr

Das erste Studienjahr des Lehramtsstudiums für Mathematik an Gymnasien bereitet vielen Studierenden Schwierigkeiten, was sich zum Beispiel auch in den Abbrecherquoten widerspiegelt. Ein Grund für die Probleme der Studierenden liegt in den hohen Anforderungen, die von Seiten der Hochschulmathematik an sie gestellt werden. So ist zum Beispiel der Abstraktionsgrad im Gegensatz zur Schulmathematik deutlich größer und führt bei den Studierenden häufig zum „Abstraktionsschock".

Im Rahmen des Projekts „Mathematik besser verstehen", das von der Deutsche Telekom-Stiftung gefördert wird, werden solche Probleme analysiert und Unterstützungsmaßnahmen entwickelt. Dabei hat sich ein differenziertes Bild von den Anforderungen und Schwierigkeiten herausgebildet. Im Folgenden soll anhand des „Beweisens in der Linearen Algebra" die Art dieser Anforderungen und Schwierigkeiten genauer beleuchtet werden.

1. Komponenten des Beweisens

Um die Schwierigkeiten, die Studierende beim Beweisen haben, besser verstehen zu können, schauen wir uns zunächst die Komponenten eines Beweises an.

Jeder Beweis (bzw. Teilbeweis) hat ein *grundlegendes Beweisformat* (direkt, indirekt oder induktiv). Studierenden fällt die Wahl des passenden Beweisformats oft nicht leicht. Während es für den induktiven Beweis noch recht eindeutige Hinweise gibt, ist die Entscheidung zwischen direktem und indirektem (Widerspruch oder Kontraposition) Beweis schwieriger.

Beweise sind aus *elementaren Beweisbausteinen* aufgebaut. Darunter verstehe ich zum Beispiel das Unterteilen eines Äquivalenzbeweises ($A \Leftrightarrow B$) in die beiden Teilschritte „$A \Rightarrow B$" und „$B \Rightarrow A$" oder die Annahme „sei x mit ... beliebig" am Anfang eines Beweises zu einer All-Aussage.

Eine weitere wichtige Komponente beim Beweisen sind die *bereichsspezifischen Beweisstrategien*. Damit sind für ein Gebiet typische Vorgehensweisen des Beweisens gemeint wie der Beweis der linearen Unabhängigkeit von Vektoren.

Schauen wir uns an einem Beispiel die bereichsspezifischen Strategien etwas genauer an. Die folgende Aufgabe stammt aus der Vorlesung „Lineare Algebra I", die von Studierenden des gymnasialen Lehramts im ersten Semester gehört wird:

Sei K ein Körper und $2 \leq n \in \mathbb{N}$. Welche der folgenden Teilmengen sind Unterräume des K-Vektorraums K^n?

$$(3) \quad G := \{(a_1, \ldots, a_n) \mid a_i \in K \text{ für } 1 \leq i \leq n,\ \sum_{i=1}^{n-1} a_i = a_n\}$$

Anwendung des Unterraumkriteriums:

(i) $G \neq \emptyset$, da z. B. $(0, \ldots, 0) \in G$ ist.

(ii) Seien $u = (a_1, \ldots, a_n), u' = (a'_1, \ldots, a'_n) \in G$ und $\lambda, \mu \in K$ beliebig. Dann gilt:

$$\sum_{i=1}^{n-1} a_i = a_n; \quad \sum_{i=1}^{n-1} a'_i = a'_n$$

Für $\lambda \cdot u + \mu \cdot u'$ folgt dann:

$$\lambda \cdot u + \mu \cdot u' = (\lambda a_1 + \mu a'_1, \ldots, \lambda a_n + \mu a'_n)$$

mit $\lambda a_i + \mu a'_i \in K$ für alle i und

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n-1}(\lambda a_i + \mu a'_i) &= \sum_{i=1}^{n-1} \lambda a_i + \sum_{i=1}^{n-1} \mu a'_i \\ &= \lambda \sum_{i=1}^{n-1} a_i + \mu \sum_{i=1}^{n-1} a'_i \\ &\overset{Vor.}{=} \lambda a_n + \mu a'_n\end{aligned}$$

Daraus folgt also $\lambda \cdot u + \mu \cdot u' \in G$.

Das Anwenden des Unterraumkriteriums besteht aus einer typischen Abfolge bestimmter Schritte. In Teil (ii) ist zu zeigen, dass der Vektor $\lambda \cdot u + \mu \cdot u'$ die definierenden Eigenschaften eines Elements von G erfüllt. Der Nachweis erfolgt durch das gezielte Zurückführen auf die Voraussetzung, dass die Vektoren u und u' diesen Eigenschaften genügen. Um die Eigenschaften selbst und die erforderlichen Umformungsschritte zu erkennen, benötigen die Studierenden „structure sense“ (Hoch & Dreyfus 2010).

Schwierigkeiten beim Anwenden bereichsspezifischer Strategien liegen häufig darin, die Strategien auf komplexere Sachverhalte adäquat zu übertragen. Während viele Studierende ohne größere Probleme in der Lage sind, das Unterraumkriterium korrekt für den 2- oder 3-dimensionalen kanonischen Vektorraum anzuwenden, haben sie oft große Schwierigkeiten, wenn die Dimension variabel wird (K^n) oder gar die Vektoren eine ungewohnte Gestalt annehmen (Vektorraum der Abbildungen).

Im Gegensatz zu den typischen bereichsspezifischen Strategien gibt es auch solche *Strategien, für die den Studierenden* - im Gegensatz zum Experten - *zur Zeit der Bearbeitung noch keine Muster zur Verfügung stehen*. Darunter fällt zum Beispiel folgende Aufgabe:

Ist $A \in K_{(n,n)}$ eine $n \times n$-Matrix mit $AX = XA$ für alle $X \in K_{(n,n)}$, dann ist $A = aI_n$ für ein $a \in K$.

Hier muss erkannt werden, dass das Einsetzen möglichst einfacher Matrizen für X (ein Eintrag 1, der Rest 0) schon die gewünschten Eigenschaften von A liefert.

An den beiden Beispielen sieht man, dass die einzelnen Komponenten beim Beweisen keineswegs separat vorliegen, sondern miteinander verwoben sind. Typische bereichsspezifische Strategien bestehen beispielsweise aus einer bestimmten Abfolge von elementaren Beweisbausteinen („seien u, u' beliebig", etc.).

2. Fachliche Anforderungen

Die Kenntnis von Strategien und dem grundlegendem Aufbau von Beweisen reicht noch nicht, um auch tatsächlich erfolgreich selbst einen Beweis führen zu können. Hinzu kommen noch viele andere fachliche Anforderungen, denen sich die Studierenden zu Beginn ihres Studiums gegenüber sehen und die sie erst zu meistern lernen müssen.

Die Studierenden müssen beispielsweise adäquate Vorstellungen zu Konzepten entwickeln und verschiedene *Ausprägungen dieser Konzepte* kennen. Beim Konzept des Vektorraums als einer Menge mit bestimmten Strukturen müssen sie einerseits die Anschauung des 2- bzw. 3-dimensionalen Raums vor Augen haben. Andererseits müssen die Studierenden erkennen, dass auch Mengen von Abbildungen als Vektorräume aufgefasst werden können.

Der *Umgang mit mathematischen Darstellungsmethoden* fällt vielen Studierenden schwer. Dabei sind Syntax, sprachliche/mathematische Präzision und Strukturiertheit beim Formulieren eines Beweises wichtig.

Auch *formales Operieren* muss von den Studierenden beherrscht werden. Kaum ein Beweis kommt ohne Termumformungen, Ziehen einfacher Schlussfolgerungen, Äquivalenzumformungen oder algorithmischen Methoden aus.

Zu den Anforderungen gehört ebenfalls das *Transferieren des Aufgabentexts* in eine Form, in der die zur Verfügung stehenden Methoden angewendet werden können. Durch diese „Übersetzung" in den mathematischen

Formalismus schafft man sich Zugriff zum Beweis (vgl. Phase Z in Ableitinger 2011). In der folgenden Aufgabe ist es zum Beispiel notwendig die Aussage „unabhängig von der Wahl der Basis“ in die mathematische Sprache zu übersetzen.

> Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über einem Körper K. Sei $f: V \to V$ eine lineare Abbildung. Ist B eine Basis von V, so bezeichnen wir wie üblich mit $M_B^B(f)$ die Matrix von f bezüglich B.
>
> Zeige: Die Matrix $M_B^B(f)$ ist dann und nur dann für jede Wahl von B dieselbe Matrix (also unabhängig von der Wahl von B), wenn $f = \lambda \cdot id$ für ein λ aus K ist.

Im mathematischen Formalismus lautet die zu beweisende Aussage dann:

$$\forall B, B' \text{ Basen von } V: M_B^B(f) = M_{B'}^{B'}(f) \Leftrightarrow \exists \lambda \in K: f = \lambda \cdot id$$

Anhand dieser Form kann man besser erkennen, dass ein möglicher Beweis mit Hilfe von Transformationsmatrizen durchführbar ist.

3. Schlussfolgerungen

Diese Aufzählung einiger Anforderungen, die an die Studierenden gestellt werden, zeigt schon ihre Vielseitigkeit. Allein daraus werden schon einige der Schwierigkeiten resultieren. Viele der Dinge müssen zu Beginn des Studiums von den Studierenden neu erlernt werden. Wo genau die Studierenden beim Bearbeiten von Aufgaben scheitern, bleibt noch zu untersuchen. So können dann gezielt Unterstützungsmaßnahmen entwickelt werden. Die „cognitive load theory“ (Sweller et al. 1998) impliziert zum Beispiel die Maßnahme, die verschiedenen fachlichen Anforderungen separat zu thematisieren und den Umgang mit Konzepten, Darstellungsmethoden, etc. einzeln zu schulen. Diese Vorgehensweise würde es den Studierenden ermöglichen, sich zunächst der implizit gestellten Anforderungen bewusst zu werden, um sich dann gezielt darin zu üben.

Literatur

Ableitinger, Ch. (2011): Komplexität von Übungsaufgaben im ersten Jahr des gymnasialen Lehramtsstudiums. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 2011. WTM-Verlag Stein, Münster.

Hoch, M., Dreyfus, T. (2010): Nicht nur Umformen, auch Strukturen erkennen und identifizieren – Ansätze zur Entwicklung eines algebraischen Struktursinns. In: Praxis der Mathematik in der Schule, Heft 33, 25-29

Sweller, J., van Merrienboer, J., Paas, F. (1998): Cognitive Architecture and Instructional Design. In: Educational Psychology Review, Vol. 10, No. 3, 251 – 296