Sabrina HUNKE, Dortmund

„Reicht das Geld?“ – wie Viertklässler Überschlagsergebnisse interpretieren

Theoretischer Hintergrund

Das Überschlagsrechnen ist wichtiger Bestandteil der Grundschularithmetik. Nicht selten wird es auf das Rechnen mit gerundeten Zahlen unter Anwendung der Rundungsregeln reduziert, dabei gibt es aber zahlreiche mögliche Strategien eine ungefähre Rechnung durchzuführen (vgl. z.B. Reys et al. 1982). Einige sollen am Beispiel der Aufgabe 239 + 219 + 224 exemplarisch aufgezeigt werden:

240 + 220 + 220 = 680 200 + 200 + 200 = 600 …	Regelkonformes Runden
239 + 219 + 224 = 600	Abbruchverfahren (Rechnen mit führenden Ziffern)
$3 \cdot 230 = 690$ $3 \cdot 200 = 600$ …	Übersetzung der Aufgabe (hier: Mittelwertsbildung)
200 + 200 + 200 = 600, da dreimal abgerundet wurde ≈ 670	Kompensation (Überschlag mit Ausgleichsrechnung)

Welche Strategie sinnvoll ist, hängt von den jeweiligen Zahlenwerten, dem Kontext und dem Aufgabentyp ab. Betrachtet man für die Grundschule typische Aufgaben zum Überschlagen wie „Wie viel ungefähr?“ und „Reicht das?“, so lassen sich diese in sogenannte *direkte* und *indirekte Überschlagsfragen* unterscheiden (vgl. van den Heuvel-Panhuizen 2001, 178).

Direkte Überschlagsfragen („Wie viel ungefähr?“) zeichnen sich dadurch aus, dass eine Zahl als Ergebnis verlangt und somit eine formelle Überschlagsstrategie benötigt wird. *Indirekte* Überschlagsfragen hingegen können auch globaler gelöst werden, da eine Zahl als Ergebnis nicht zwingend erforderlich ist (ebd.). Auch hier ist das Anwenden formaler Überschlagsstrategien (z.B. Rechnen mit gerundeten Zahlen) möglich, der Lösungsprozess kann aber auch enden, sobald feststeht, dass die Summe z.B. über dem vorhandenen Budget liegt (vgl. Trafton 1978). Van den Heuvel-Panhuizen (2001) sieht deshalb in indirekten Überschlagsfragen den geeigneteren Aufgabentyp zum Einstieg ins Überschlagsrechnen.

Dass das Überschlagsrechnen nicht nur ein algorithmisches „Abspulen“ der Rundungsregeln ist, wird nicht nur an den verschiedenen Strategien und Aufgabentypen deutlich. So steht das Überschlagsrechnen auch in Beziehung zu anderen Bereichen, wie z.B. dem Zahlensinn, affektiven Faktoren, und flexiblem Rechnen (vgl. z.B. Sowder 1992; Verschaffel et al. 2007). Insgesamt handelt es sich somit beim Überschlagsrechnen um einen komplexen Prozess, der verschiedene Wissenskomponenten erfordert.

Neben dem Wissen, wie man einen Überschlag durchführt, wird vor allem das Wissen über die Auswirkungen des Überschlagens (Überschlagsergebnis liegt über/unter genauem Ergebnis) als zentral befunden (vgl. z.B. LeFevre et al. 1993). Van den Heuvel-Panhuizen (2001, 184) macht in diesem Zusammenhang auf eine Besonderheit der indirekten Überschlagsfragen aufmerksam. Am Beispiel der Aufgabe „Liegt die Summe von 186, 495 und 197 über oder unter 1000?“, betont sie, dass Schülerinnen und Schüler „must be able to perceive that rounding up three times (besides the fact that the sum of the rounded off numbers is only 900) allows them to be certain that the total must be under 1000” (ebd.).

Hier werden m.E. zwei Aspekte deutlich: nicht nur der o.g. operative Zusammenhang zwischen Überschlag und genauer Rechnung muss hergestellt werden. Vor allem gilt es zu verstehen, dass es einen inhaltlichen Zusammenhang zwischen Überschlag und genauer Rechnung gibt. Um eine indirekte Überschlagsfrage wie „Reicht das?“ sicher beantworten zu können, muss das Überschlagsergebnis noch interpretiert werden.

Eine Untersuchung mit 42 Kindern des vierten Schuljahres

Da bisweilen kaum empirische Daten zum Überschlagsrechnen für den deutschen Sprachraum einerseits und zu den Besonderheiten von direkten und indirekten Überschlagsfragen andererseits vorliegen, wurden im Rahmen meines Promotionsprojekts 42 Kindern des vierten Schuljahres im klinischen Interview je zwölf Aufgaben zum Kontext „Reicht das Geld?“ oder „Wie viel ungefähr?“ vorgelegt. Die Dissertation setzt sich vor allem mit den Vorgehensweisen der Kinder beim Überschlagsrechnen auseinander. Im Rahmen dieses Beitrags ist vor allem von Interesse, inwiefern Kinder ihre Überschlagsergebnisse bei indirekten Überschlagsfragen interpretieren.

Ergebnisse

In der Studie wurden ca. 38 % aller Lösungen der „Reicht das Geld?“-Aufgaben durch Rechnen mit gerundeten Zahlen bestimmt. Im Hinblick auf die Interpretation dieser Überschlagsergebnisse ließen sich zwei wesentlich verschiedene Vorgehensweisen ausmachen. Entweder der Überschlag wird interpretiert oder er wird nicht interpretiert.

Es konnte beobachtet werden, dass die Interpretation entweder in Form der Überschlagsstrategie *Kompensation* stattfindet, durch Kompensation und einer genauen Rechnung oder nur durch eine genaue Rechnung. So zieht bspw. Franziska die Auswirkungen des Rundens in Betracht (Kompensation) und schließt daraus korrekt, dass das Geld vermutlich reiche.

Du hast 30 €. Du kaufst eine CD für 19,95 € und ein Buch für 9,55 €? Reicht das Geld?
Franziskas Überschlag: 20 + 10 = 30

F: Das wären jetzt 30 Euro, **da aber hier aufgerundet und da auch aufgerundet wird, ähm, glaube ich jetzt nicht, dass das alles 30 zusammen ergibt. Moment, ich rechne das jetzt noch mal so** (notiert und löst genaue Rechnung). Ja, weil hier halt wieder aufgerundet und aufgerundet, ist ja dann halt mehr und ähm deshalb auch die 30 Euro.

Obwohl diese Interpretation durch Kompensation schon ausreichend für eine sichere Antwort wäre, überprüft sie diese noch mithilfe einer genauen Rechnung. Ihr ist also bewusst, dass der Überschlag interpretiert werden muss, scheint gleichzeitig aber nicht in ihre Kompensation zu vertrauen.

Jessica hingegen interpretiert den Überschlag nicht. Ihr Überschlag zur Aufgabe „Larissa hat 25 €. Reicht das Geld für sieben Buchstaben aus Holz? Ein Holzbuchstabe kostet 3,55 €“ ist *7 · 4 = 28* und ihre Antwort: „*Da reicht das Geld bei ihr nicht, da hat sie 3 Euro zu wenig gespart*!“. Sie benennt hier die Differenz zwischen dem vorhandenen Budget und dem Überschlagsergebnis, was darauf hinweist, dass sie die Antwort auf die „Reicht das?“-Frage direkt aus dem Überschlagsergebnis ableitet. Sie betrachtet den Überschlag somit als eigenständige Rechnung, unabhängig von der genauen Rechnung.

Solch eine separate Betrachtung kann weitreichende Folgen haben, was am Beispiel von Anna deutlich wird. Anna löst die Aufgaben stets genau und macht nur nach expliziter Aufforderung noch einen Überschlag. Da aber auch sie den Überschlag als eigenständige Rechnung betrachtet, kommt Anna immer dann, wenn der Überschlag zu einer anderen Antwort auf die „Reicht das?“-Frage führt als das genaue Ergebnis, zu dem Entschluss, dass der Überschlag dann nicht möglich sei. Anna ist also einerseits in der Lage einen Überschlag durchzuführen (Anwendung der Rundungsregeln), ist sich aber andererseits nicht der Bedeutung des Überschlags bewusst, was dazu führt, dass der Überschlag aus ihrer Sicht nicht immer möglich ist.

Fazit und Konsequenzen für den Unterricht

Eine zentrale Wissenskomponente des Überschlagsrechnens ist das Wissen, dass der Überschlag eine Modellrechnung für eine genaue Rechnung darstellt und somit insbesondere bei indirekten Überschlagsfragen noch interpretiert werden muss. Während die Kinder in der vorgestellten Studie i.d.R. einen Überschlag durchführen konnten, war die Interpretation nicht selbstverständlich. Dies bestärkt die Vermutung, dass das Überschlagsrechnen häufig nur algorithmisch durchgeführt wird, ohne dass seine Bedeutung umfassend verstanden wird. Gleichzeitig wird deutlich, dass Strategien zum Herstellen der operativen Beziehungen (Kompensation) eine zentrale Rolle spielen, dass Kinder aber nicht immer darauf vertrauen. Ein von Beginn an gezielterer Einsatz dieser Aufgabenformate in Kombination mit einer stärkeren Betonung von Kompensationsstrategien ist somit wünschenswert, um die Bedeutung des Überschlags für Schülerinnen und Schüler transparenter zu machen.

Literatur

LeFevre, J., Greenham, S.L. & Waheed, N. (1993): The development of procedural and conceptual knowledge in computational estimation. In: Cognition and Instruction, 11(2), 95-132.

Reys, R.E., Rybolt, J.F., Bestgen, B.J. & Wyatt, J. W. (1982): Processes used by good computational estimators. In: Journal for Research in Mathematics Education, 13(3), 183-201.

Sowder, J. (1992): Estimation and Number Sense. In D. A. Grouws (Hrsg.): Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning. A Project of the National Council of Teachers of Mathematics. New York: Macmillan, 371-389.

Trafton, P.R. (1978): Estimation and mental arithmetic: Important components of computation. In M.N.Suydam & al. (Hrsg.): Developing computational skills. Reston: The Council, 196-213.

Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2001). Children learn Mathematics. A learning-teaching trajectory with intermediate attainment targets for calculation with whole numbers in primary school. Utrecht: Freudenthal Institut.

Verschaffel, L., Greer, B. & DeCorte, E. (2007): Whole number concepts and operations. In F. K. Lester (Hrsg.): Second handbook of research on mathematics teaching and learning. A project of the National Council of Teachers of Mathematics. Charlotte, NC: Information Age Publ., 557-628.