

Stefan-Harald KAUFMANN, Köln

Schülervorstellungen zu Vektoren und Geraden

Im Unterricht der analytischen Geometrie in der Sekundarstufe II Oberstufe setzen sich Schülerinnen und Schüler zu einem großen Teil mit Problemstellungen der ebenen und räumlichen Geometrie auseinander. Vektoren nehmen häufig die Rolle eines zentralen Hilfsmittels zur Beschreibung verschiedener Objekte ein. Die Vorstellungen, die Lernende von den beschriebenen Objekten entwickeln, können sehr unterschiedlich sein und sind von verschiedenen Aspekten abhängig.

1. Forschungsprojekt

In dem hier vorgestellten Teil eines Forschungsprojekts an der Universität zu Köln soll zunächst untersucht werden welche Vorstellungen Schülerinnen und Schüler jeweils von Vektoren und Geraden besitzen. In einem weiteren Schritt wird analysiert wie die Vorstellungen zu diesen einzelnen Begriffen miteinander in Beziehung gesetzt werden und welche Hilfsmittel dabei verwendet werden. Im theoretischen Teil konzentriert sich die Untersuchung auf die Analyse von Schulbüchern, curricularen Vorgaben und die Ergebnisse der fachdidaktischen Forschung, um Aspekte herauszuarbeiten, die Vektoren und Geraden im Geometrieunterricht der Sekundarstufe auszeichnen. Im praktischen Teil, der qualitativen Auswertung von Schülerinterviews zu den Themenfeldern „Vektor“ und „Gerade“ werden die Aspekte der analytischen Geometrie erarbeitet, die bei den interviewten Schülerinnen und Schülern auftraten bzw. erkennbar waren.

Die im Projekt durchgeführten Untersuchungen konzentrieren sich auf Grundbegriffe, die im Geometrieunterricht der Sekundarstufe II thematisiert werden können. Zu diesen Begriffen gehören der Vektorbegriff und der Geradenbegriff. Beide Begriffe werden in einer vektoriellen Gleichung, beispielsweise

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix},$$

miteinander in Beziehung gesetzt. Die geometrische Interpretation dieser Vektorgleichung ist von mehreren Teilaspekten abhängig. Eine zentrale Rolle spielt das Verständnis von Vektoren und Geraden. Darüber hinaus beeinflusst das Variablenverständnis sowie der Umgang und die Auffassung von Gleichungen die Interpretation einer „linearen“ Vektorgleichung. Denn beide, sowohl Variable(n) als auch Gleichung, fungieren in der vektoriellen analytischen Schulgeometrie als ein Bindeglied, um den Vektor-

begriff und den Geradenbegriff miteinander in Beziehung setzen bzw. vernetzen zu können.

Im Rahmen der Untersuchung wurden 21 Schülerinnen und Schüler aus Leistungskursen der Jahrgangsstufe 13 von vier verschiedenen Gymnasien aus dem Kölner Umland interviewt. Die Interviews wurden Ende Januar bzw. Anfang Februar 2010 vor der Abiturprüfung an der Universität zu Köln durchgeführt. Der Ablauf war in zwei Phasen unterteilt. In der ersten Phase bekamen die Schülerinnen und Schüler die folgende Aufgabe aus dem Bereich vektorielle analytische Geometrie vorgelegt:

„Der Kapitän eines Schiffes registriert um 16:00 auf dem Radar einen Eisberg, der sich 7 Seemeilen südlich des Schiffes befindet. Die Meereströmung treibt den Eisberg pro Stunde 3 Seemeilen nach Osten und 1 Seemeile nach Norden. Das Schiff fährt trotz der Meeresströmung pro Stunde auf seinem Kurs 4 Seemeilen nach Osten und 4 Seemeilen nach Süden. Soll der Kapitän den Kurs des Schiffes ändern?“

Eine Lösung der Aufgabe wurde von den Schülerinnen und Schülern in Partnerarbeit erarbeitet und sollte die folgenden Interviews vorbereiten. Die Erarbeitung wurde mit einer Videokamera aufgezeichnet; als Hilfsmittel hatten die Lernenden Papier, Stifte, Lineal und Taschenrechner zur Hand.

Nach Bearbeitung der Aufgabe wurden die Lernenden einzeln interviewt. Dabei wurden Schülerinnen und Schülern sieben vorher festgelegte Fragen zu der Aufgabe und weiteren Inhalten der vektoriellen analytischen Geometrie gestellt. Drei dieser Fragen waren:

- „Könntest Du erklären was Du Dir unter einem Vektor vorstellst.“
- „Könntest Du erklären was Du Dir unter einer Geraden vorstellst.“
- „Ich habe hier eine Geradengleichung. Könntest Du erklären woraus sie sich zusammensetzt.“ (Dabei legt der Interviewer eine Karte, auf der die obige Vektorgleichung notiert ist, vor.)

Die Interviews wurden mit einer Videokamera aufgezeichnet und bilden den Kern des praktischen Teils der Untersuchung.

Die durchgeführten Interviews werden bei der Erstellung individueller primärer Begriffs-Konzepte des Vektorbegriffs und des Geradenbegriffs herangezogen. Von primären Begriffs-Konzepten wird deshalb gesprochen, da man im Allgemeinen nicht davon ausgehen kann, dass Schülerinnen und Schüler in einem Interview ihr gänzlich Wissen über Vektoren oder Geraden kommunizieren werden, sondern nur die Aspekte, die sie unmittelbar mit den Begriffen verbinden. In einem weiteren Arbeitsschritt wird durch Generierung idealisierter Konzepte ein Kategoriensystem zu den einzelnen

Begriffen erstellt. In einem dritten Schritt wird untersucht wie die Begriffe miteinander in Beziehung gesetzt werden.

In diesem Beitrag werden einige Ergebnisse für idealisierte Vektoren-Konzepte vorgestellt. Erste Teilergebnisse über die Vernetzung dieser Begriffe mit Hilfe einer Vektorgleichung unter besonderer Berücksichtigung der Variableninterpretation sind in Kaufmann (2010) angeführt.

2. Teilergebnisse

Die Interviews wurden zusammen mit den Aufzeichnungen der Schülerinnen und Schüler, die während der Befragung angefertigt wurden, inhaltlich transkribiert. Die inhaltliche Auswertung der Interviews orientiert sich methodisch an Mayring, (2008). Zunächst wurden relevante Textstellen markiert. Die markierten Zitate wurden anschließend auf den Inhalt reduziert. In einem weiteren Schritt wurden die Zitate durch Zuweisung eines geeigneten Codes generalisiert. Zuletzt wurden die Codes idealisiert, um für die jeweiligen Begriffe Kategoriensysteme generieren zu können.

Für den Vektorbegriff lieferte diese Auswertung unter anderem folgende Kategorien:

- Tupel: Ein Vektor wird mit einem Tupel als Objekt identifiziert.
- Klasse: Ein Vektor wird als eine Klasse von Objekten identifiziert.
- Pfeil: Ein Vektor wird als Pfeil identifiziert.
- Gerichtete Strecke: Ein Vektor wird als eine ausgerichtete Strecke (beispielsweise durch Start- und Endpunkt) identifiziert.
- Bewegung: Ein Vektor wird als eine Bewegung identifiziert.

Einerseits sind die Kategorien nicht disjunkt und andererseits können mehrere Kategorien innerhalb eines Interviews auftreten. Dies kann an dem Fall „Damian“ (Ausschnitt der Transkription auf der nächsten Seite) exemplarisch demonstriert werden.

Diesem Textabschnitt können sogar vier der fünf oben genannten Kategorien zugeordnet werden. Das sind die Kategorien „Pfeil“ (Z. 61, 67), „Bewegung“ (Z. 62), „Tupel“ (Z. 65,66) und „gerichtete Strecke“ (Z. 67-71). Die Äußerung in Zeile 67 „Angabe von einem Punkt zu nem anderen“ ist ein Beispiel für ein Zitat, welches zunächst in die Kategorie „Bewegung“ als auch als „gerichtete Strecke“ eingeordnet werden kann. Die weiteren Ausführungen in den Zeilen 69 bis 71 deuten darauf hin, dass Zeile 67 tatsächlich als „gerichtete Strecke“ interpretiert werden kann und keine Wiederholung der Äußerung aus Zeile 62 ist. Das Zitat „ein Vektor ist eine Richtungsangabe“ (Z. 58) konnte bei der Idealisierung der Konzepte

keinem Aspekt zugeordnet werden, da sie so formuliert ausschließlich in diesem Interview auftrat. Das Zitat kann in diesem Fallbeispiel als eine grundlegende Eigenschaft von Vektoren interpretiert werden.

58 S: Äh ein Vektor ist ist eine eine Richtungsangabe, das ist schwer, so und
59 (5 Sek.) dargestellt werden Vektoren; man kann sie halt äh in zwei
60 verschiedenen Weisen darstellen. Erstens haben wir äh diese
61 Pfeildarstellung und das ist dann halt (*Zeichnet einen Strich, notiert 1*
62 *und malt einen Pfeil auf Abb. 3.*) eine bewegte Richtung. Das kann aber
63 auch; äh also Vektoren haben dann auch ne Länge und zweitens
64 kann man äh Vektoren auch in dieser anderen Schreibweise, indem
65 man halt die Zahlen hier hat a b c nenne ich (*Notiert auf Abb. 3 ein*
66 *Spaltentupel mit den Einträgen a, b und c.*) die jetzt mal. Ja, so sieht es
67 aus wie nen Pfeil und das ist halt eine Angabe von einem Punkt zu nem
68 anderen. Eine .. ja. Und der Betrag des Vektors ergibt die Länge. Das
69 heißt: Wenn ich in einem in einem Raum zwei Punkte habe und das
70 Verbindungsstück zwischen zwei beliebigen Punkten in einem Raum ist
71 dann der Vektor. So ungefähr.

Ein anderes Fallbeispiel ist „Charlotte“.

49 S: Ein Vektor ist ein .. auch eine Gerade, die eine Richtung im Raum
50 anzeigt oder beschreibt. Also eigentlich könnte man eine Gerade auch
51 durch einen Vektor ausdrücken.

Die Transkription des Interviews belegt, dass Charlotte Schwierigkeiten hat die Begriffe „Vektor“ und „Gerade“ zu unterscheiden, da sie jeden der Begriffe durch den jeweils anderen erklärt. Sie scheint einen Vektor als eine gerichtete Gerade (Z. 49, 50) zu verstehen. Bezieht man die Aufzeichnungen von Charlotte aus dem Interview mit ein, so wird deutlich, dass Sie sich unter einem Vektor eine gerichtete Strecke vorstellen könnte. Denn Sie zeigt bei Ihren Äußerungen (Z. 49, 50) auf den Start- und Endpunkt einer aufgezeichneten Strecke; spricht aber von einer Geraden.

Nach der gleichen Vorgehensweise wurden die Äußerungen zum Geradenbegriff und die Deutung der obigen Vektorgleichung ausgewertet, um analysieren zu können wie Schülerinnen und Schüler am Ende der Sekundarstufe diese Begriffe miteinander vernetzen.

Literatur

- Kaufmann, S.-H. (2010): Schülerauffassungen von Variablen in der analytischen Geometrie. In: Beiträge zum Mathematikunterricht, 44, 477 - 480.
- Mayring, P. (2008): Qualitative Inhaltsanalyse. Weinheim/Basel: Beltz Verlag.