

Christina KRAUSE, Bremen

Formen und Funktionen des Zeichengebrauchs im mathematischen Erkenntnisprozess

Anders als in anderen Wissenschaften sind mathematische Objekte selbst nicht greifbar und können daher nur über Zeichen zugänglich gemacht werden. Dies wird besonders deutlich bei der Konstruktion mathematischen Wissens in sozialen Interaktionen, z.B. wenn mehrere Schüler gemeinsam an einem mathematischen Problem arbeiten. So werden unterschiedliche semiotische Ressourcen genutzt, um Beobachtungen und Erkenntnisse mitzuteilen, oder auch, um das gemeinsame Arbeiten zu organisieren.

Dieser Beitrag beschäftigt sich mit der Vielfalt der gebrauchten Zeichenarten und ihren Beziehungen untereinander, sowie mit ihren Funktionen in kollektiven mathematischen Erkenntnisprozessen.

Theoretischer Rahmen

Nach Peirce ist ein Zeichen stets eingebunden in eine triadische Relation, bestehend aus Objekt, Zeichen (Repräsentamen) und Interpretant, in dem das Zeichen zwischen Objekt und Interpretanten vermittelt: „Das Zeichen determiniert den Interpretanten, das Objekt auf eine bestimmte Weise zu repräsentieren“ (Peirce CP 2.228). Der Interpretant ist selbst ein Zeichen und repräsentiert das vom Interpretierenden gedachte „unmittelbare Objekt“ (Hoffmann 2005). Diese Auffassung von Zeichen erlaubt es, verschiedene Zeichen, die in Zusammenhang mit einer bestimmten Idee oder einem sich in der Interaktion entwickelndem Objekt gebraucht werden, zueinander in Beziehung zu setzen. Diesen Ansatz verfolgt auch Arzarello (2006) mit seinem Modell des semiotischen Bündels. Hierbei handelt es sich um eine dynamische Struktur, bestehend aus einer Menge von Zeichen und ihren (zeitlichen) Beziehung zueinander. Mit diesem Modell werde ich sowohl synchron wie auch diachron verlaufende Semioseprozesse analysieren, um „das komplexe Ineinandergreifen von Gesten, Sprache und Inskriptionen beim Mathematiklernen“ (Arzarello et al. 2009, 106) zu beschreiben. Mit Sprache sind hierbei lautsprachliche Äußerungen gemeint. Ich werde diesen Begriff im Folgenden beibehalten.

Zur Analyse der einzelnen Komponenten bediene ich mich der Sprechakttheorie nach Austin (1972), der Kategorisierung von Gesten nach McNeill (2005) und der Diagrammatisierung nach Peirce.

Austin unterscheidet bei lautsprachlichen Äußerungen drei Ebenen. Neben der Inhaltsebene (lokutionär) wird auch gehandelt, indem man etwas sagt (illokutionär), um so eine Reaktion hervorzurufen (perlokutionär). Eine Analyse der sprachlichen Äußerungen ist also sinnvoll, um zu beobachten, welche Funktionen die Sprache einnehmen kann, um diese mit den Funktionen der

weiteren Zeichen in Zusammenhang zu bringen. Treten Gesten zusammen mit Sprache auf, so gibt es nach McNeill fünf verschiedene Formen des Auftretens, von denen allerdings nur zwei in Verbindung mit mathematischen Objekten relevant sind: ikonische Gesten und Zeigegesten. Als Inskription verstehe ich alles, was in irgendeiner Weise festgehalten wird. Drückt diese Inskription eine Relation aus, so handelt es sich nach Peirce um ein Diagramm. Nach Hoffmann gilt das Arbeiten hieran in der Peirceschen Semiotik als zentrales Mittel zur Erkenntnisentwicklung (Hoffmann 2005).

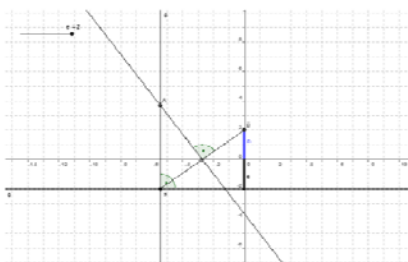
Methodische Überlegungen

Zu einer ersten Analyse nutze ich Daten, die im Rahmen des deutsch-israelischen Projektes „Effective knowledge construction in interest-dense situations“ (gefördert von der German-Israeli-Foundation, grant 946-357.4/2006) erhoben wurden. Hier beziehe ich mich auf ein leistungsstarkes Schülerinnenpaar (10. Klasse), das eine Aufgabe zur Parabel als geometrischen Ort bearbeitet. Es wurden Videoaufzeichnungen aus drei verschiedenen Blickwinkeln (frontal, Monitor, Schreibprozess) erstellt, wodurch bereits eine semiotische Perspektive berücksichtigt wird. Transkribiert wurden sowohl die sprachlichen Äußerungen als auch die nicht-sprachlichen Handlungen. Zunächst erfolgt eine Identifizierung, Kategorisierung und Analyse der auftretenden Zeichenarten. Um diese semiotischen Ressourcen miteinander in Beziehung zu setzen, schließt sich eine Analyse des semiotischen Bündels Sprache – Geste – Inskription an.

Die Aufgabe: „Welche Kurve siehst du?“

In der Aufgabe beschäftigen sich die Schüler mit der Parabel als geometrischem Ort. Hierzu stehen ihnen mehrere Repräsentationen einer Parabel zur Verfügung, wobei die erste zunächst gemäß einer Konstruktionsanweisung erstellt werden muss. Hierfür sollen die Schülerinnen einen beliebigen Punkt C auf der unteren, längeren Kante eines DIN A4-Blattes auf einen gegebenen Punkt M knicken, die Senkrechte zur unteren Kante des Blattes durch den Punkt C zeichnen, und den Schnittpunkt dieser Senkrechten mit dem Knick markieren. Dies sollen sie für verschiedene Punkte C wiederholen bis sie eine Kurve erkennen.

Die markierten Punkte liegen auf einer Parabel und die Knicke repräsentieren sowohl die Tangenten an der Kurve an dem zugehörigen markierten Schnittpunkt, wie auch eine Spiegelachse, an der C auf M gespiegelt wird. Daraufhin arbeiten die Schülerinnen mit der dynamischen Geometrie-Software Geogebra an einer Umgebung, in der sie den variablen Punkt C nach links und rechts verschieben und so eine Spur erzeugen können. Zudem können



sie mit einem Schieberegler den Abstand zwischen dem festen Punkt M und der y-Achse variieren. Die Abbildung links zeigt eine mögliche Situation. Diese bekommen die Schüler als Ausdruck, auf dem Markierungen vornehmen können. Die Aufgabe besteht darin, die Kurve als Parabel zu identifizieren, dies durch eine Funktionsvorschrift zu begründen und nach Vorbild des Kreises eine Definition der Parabel als Punktmenge zu formulieren.

Erste Beobachtungen und Ausblick

Die Schülerinnen verwenden nicht-sprachliche Zeichen beinahe ausnahmslos in Zusammenhang mit Sprache. So erlauben z.B. ikonische Gesten als flüchtige Repräsentationen das Austreten einer Idee. Erweisen sich diese dann als viabel, so kann sich später durch Gebrauch und Modifizierung dieser Geste auf sie berufen und an bisherige Ergebnisse angeknüpft werden. Solche Zeichen nennt Arzarello „basic signs“ (Arzarello & Paola 2007). Ein Beispiel hierfür ist die Etablierung der vertikal vor dem Körper durchgeführten Handbewegung zur Darstellung der Symmetrieachse der Parabel (siehe rechts). Ikonische Gesten werden hier auch genutzt, um Ideen auszudrücken, die noch nicht ausgebildet genug sind, um sie in Worte zu fassen und so dem Arbeitspartner einen Denkansatz mitzuteilen, an den er anknüpfen kann.

Treten Inskriptionen synchron zu Sprache auf, so unter anderem wenn Erkenntnisse für den Arbeitspartner nachvollziehbar gemacht werden. Bei der diachronen Entwicklung von Sprache und Inskriptionen muss man unterscheiden, in welcher Richtung diese Entwicklung erfolgt. Ähnlich zum synchronen Gebrauch beziehen sich die Schüler in sprachlichen Äußerungen auf bestehende Inskriptionen, um zu erklären, wieso sie diese produziert oder manipuliert haben oder was ihnen durch sie aufgefallen ist. Andersrum nutzen sie Sprache, um gemeinsame Lösungsstrategien oder Formulierungen abzuklären, die in der Folge verschriftlicht werden. Hier werden durch die Bezugnahme der Sprache auf die Inskription individuelle Erkenntnisse mitgeteilt, um dessen Tragfähigkeit prüfen zu lassen und um eine gemeinsame Arbeitsbasis zu halten. Bei der Entwicklung von Sprache zu Inskription werden die Ergebnisse gemeinsam ausgehandelt.



Das komplexeste Zeichenbündel ist beobachtbar, wenn die Schülerinnen sowohl Gesten als auch Inskriptionen in Verbindung mit sprachlichen Äußerungen benutzen, um sich einer Idee zu nähern. Hierbei fällt in Zusammenhang mit den Gesten zweierlei auf: Zum Einen gebrauchen die Schüler Zeigegesten ausschließlich synchron zu Sprache und Inskriptionen so, dass sie zwischen deiktischen Phrasen und Gezeigtem vermitteln. Zum Anderen treten ikonische Gesten hier vor Allem in der zweiten Hälfte der Aufgabenbearbeitung auf. Dies erkläre ich dadurch, dass die Schüler mit fortschreitender Bearbeitung auf ein immer größeres Repertoire solcher Gesten als basic signs zurückgreifen können.

Die Produktion eines Diagrammes in Folge einer solchen gestischen Darstellung lässt sich beobachten, wenn viele Komponenten, gestische wie auch sprachliche, ein solches basic sign ergänzen. Durch das Erstellen einer Inskription findet somit eine Entlastung zugunsten des Schaffens von Übersichtlichkeit statt.

Anhand dieser ersten Beobachtungen lässt sich erkennen, dass nicht-sprachliche Zeichen im mathematischen Erkenntnisprozess gebraucht werden, um sprachliche Ausdrucksmöglichkeiten zu ergänzen. Besonders hilfreich scheint die Verwendung semiotischer Ressourcen zu sein, wenn verschiedene (nicht zwingend konkurrierende) Aspekte eines mathematischen Objekts einbezogen werden. Das Etablieren von basic signs kann hierbei wichtig sein, um gemeinsam eine Art Code zu generieren, der den mathematischen Diskurs erleichtert. Um zu dies zu prüfen und zu untersuchen, welche Hindernisse sich hierdurch ergeben können, werden weitere Daten gesichtet.

Literatur

- Arzarello, F. (2006). Semiosis as a multimodal process. *Relime, Numero Especial*, 267-299
- Arzarello, F. & Paola, D. (2007). Semiotic games: The role of the teacher. In J. Woo, H. Lew, K. Park & D. Seo (Hrsg.), *Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 2, 17-24.
- Arzarello, F., Paola, D., Robutti, O. & Sabena, C. (2009). Gestures as semiotic resources in the mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*. 70, 97-109
- Austin, J. L. (1972). *Zur Theorie der Sprechakte (How to do things with words)*. Stuttgart: Reclam.
- Hoffmann, M. H. G. (2005). *Erkenntnisentwicklung*. Philosophische Abhandlungen Bd. 90. Frankfurt am Main: Klostermann.
- McNeill, D. (2005). *Gesture and thought*. Chicago: University of Chicago Press.
- Peirce, C. S. (1931-1958). *Collected Papers (Vol. I-VIII)* In C. Hartshorne, P. Weiss, A. Burks (Hrsg.). Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press.