Julian KRUMSDORF, Münster

Sprachliche Aspekte beispielgebundenen Beweisens

Solange SchülerInnen der formellen mathematischen Sprache noch nicht mächtig sind, kann man sie allgemeingültige Aussagen an Beispielen beweisen lassen. Beim beispielgebundenen Beweisen stehen die SchülerInnen dann vor der Herausforderung, das Allgemeingültige am Besonderen der Beispiele nicht nur zu erkennen, sondern auch entsprechend auszudrücken. Einige interviewte SchülerInnen der Primar- und Sekundarstufe setzen ihre mathematikhaltige Umgangssprache bei den gewählten arithmetischen und geometrischen Aufgabenformaten kreativ und versiert ein. Dies erleichtert es ihnen, die zunächst latente Sinnstruktur eines Beweises an Beispielen allmählich subjektiv zu realisieren und zu manifestieren.

1. Motivation

An zentralen Beweisfunktionen nennt de Villiers (1990) *verification, explanation*, *systematisation, discovery* und *communication*. Zusammen mit der verifikativen und erklärenden Funktion ist die kommunikative Funktion gerade für das beispielgebundene Beweisen von großer Bedeutung: Ein durchweg formeller (formalisiert dargestellter) Beweis mag eine Behauptung zwar verifizieren, lässt uns aber nicht immer verstehen, warum eine Aussage wirklich gilt. Bei der Erklärung des „Warum" könnte uns ein Heranziehen allzu vieler Beispiele den Blick auf das Allgemeingültige jedoch auch verstellen und uns möglicherweise dem Vorwurf aussetzen, wir prüften bloß induktiv. Es ist für uns als Gesprächspartner somit eine Herausforderung, das am Beispiel allgemeingültig Beweisbare subjektiv zu erkennen, einander sprachlich angemessen zu vermitteln und es uns damit zu einem sozial geteilten Gut werden zu lassen. Dass sich die sprachliche Problematik und Relevanz beispielgebundenen Beweisens nicht allein auf den Mathematikunterricht der Primar- und Sekundarstufe beschränkt, zeigt uns eine vermutlich etwa 20jährige Studentin in einem Internetblog vor ihrer Frage nach der Kantenanzahl eines vollständigen Graphen ganz allgemein: „Unser Problem ist es meistens immer das [sic!] wir die meisten Sachen nicht allgemein ausdrücken können. Sobald es um das rechnen mit Zahlen geht können wir meistens alles ..." (Matheplanet 2008).

2. Forschungsstand

In der einschlägigen Literatur zum beispielgebundenen Beweisen werden verschiedene Beweisarten in Abgrenzung zu formellen Beweisdarstellungen betrachtet. Semadeni (1976) spricht zunächst von *premathematical proofs* und später von *action proofs*. Mason & Pimm (1984) untersuchen *generic examples* in Vorbereitung auf *generic proofs*. Die dabei als Träger des Allgemeinen fungierenden Beispiele versuchen sie auf der sprachlichen und ikonischen Ebene von *specific / particular examples* abzugrenzen. Wittmann (1985) führt *operative proofs* ein, bei denen allgemein einsetzbare (und in diesem Sinne) allgemeingültige mathematische Regeln verwendet werden. Später berücksichtigen Wittmann & Ziegenbalg (2004) dann auch das Moment der Versprachlichung von Operationen, insbesondere wenn sie enaktiv und ikonisch repräsentiert werden. Dem gegenüber stellen Borwein & Jörgenson (2001) Kriterien für sogenannte *(acceptable) visual proofs* auf, bei denen eine visuelle Darstellung Beispielcharakter derart hat, dass an ihr ein Beweis geführt werden kann. *Operative proofs* und *visual proofs* lassen sich – letztere im Sinne „bildlich gebundener Beweise" – als Spezialfälle beispielgebundener Beweise ansehen. Dies impliziert das Paradox, dass *visual proofs* auch der sprachlichen Explikation bedürfen.

3. Forschungsgegenstand

Das beispielgebundene Beweisen lässt sich vordergründig als induktives Prüfen (Bestätigen) einer behaupteten Aussage verstehen; dabei wird die Richtigkeit der Behauptung in einem oder mehreren Beispielen bestätigt. Beim induktiven Prüfen mit latenter Beweisidee (welches Meyer & Voigt (2009) mit den Schlussformen nach Peirce analysieren) kann jedoch auch ein allgemeiner Beweis für das, was allen Beispielen gemein ist, gesehen werden. Mit Oevermann (1979) lässt sich dieser allgemeine Beweis als (latente) Sinnstruktur verstehen, die der Lernende zunächst subjektiv realisieren muss und in seinen sprachlichen Äußerungen teilweise manifestieren kann. Der Lernende beweist beispielgebunden, wenn ein betrachtender Experte in dem vom Lernenden manifestierten Beweis eine Sinnstruktur sieht. Zur idealisierten Darstellung eines Beweises als Sinnstruktur eignen sich beispielgebundene Argumentgefüge, die auf die Theorie der Struktur von Argumenten nach Toulmin zurückgreifen, vgl. Schwarzkopf (2000).

4. Empirischer Rahmen

Die Untersuchung sprachlicher Aspekte beispielgebundenen Beweisens erfolgt im Rahmen einer bald veröffentlichten Studie zum beispielgebundenen Beweisen. Für die hier exemplarisch vorgestellte Teilstudie haben etwa 15 Grundschüler der Klasse 4 und etwa 10 Gymnasialschüler der Klasse 7 an je einem etwa halb- bis einstündigen Lehr- und Lernexperiment teilgenommen. Die SchülerInnen wurden dabei einzeln zum beispielgebundenen Beweisen herausgefordert. Die ihnen unbekannten Behauptungen an gegensinnig veränderbaren Summanden, an Zahlenmauern oder an vollständigen Graphen mussten die SchülerInnen zum Teil noch entdecken und ggf. induktiv prüfen. Während der Einzelbefragungen griff der Interviewer insbesondere zu dialogischen Hilfsmitteln. Etwa verhielt dieser sich als *advocatus diaboli*, schlüpfte in die Rolle eines Mitschülers oder hinterfragte Aussagen von SchülerInnen nach ihrer Allgemeingültigkeit. Einige Videoaufzeichnungen wurden schließlich zu Analysezwecken transkribiert. Manche Transkriptausschnitte können extensiv analysiert werden, um Deutungshypothesen über die sprachliche Entwicklung von Schülerinnen während ihres beispielgebundenen Beweisens zu gewinnen, etwa an Übergängen zwischen dem induktiven Prüfen und dem (ggf. formellen) Beweisen. Bezogen auf die eher sprachlichen Aspekte beispielgebundenen Beweisens sind u.a. folgende Fragen von Interesse: Wie verbalisieren die SchülerInnen das Allgemeingültige in der allmählichen Ablösung vom Besonderen der Beispiele? Welche Indizien liefert die sprachliche Manifestation der SchülerInnen dafür, dass SchülerInnen den Beweis subjektiv realisieren? Wie lässt sich die sprachliche Manifestation des Beweises fördern?

5. Exemplarische Ergebnisse

Stellvertretend für einige Ergebnisse der Untersuchung sprachlicher Aspekte beispielgebundenen Beweisens seien an dieser Stelle genannt:

Die Vorgabe von Begriffen und das Einüben von Operationen im Sinne von Wittmann (1985) regt die SchülerInnen zum beispielgebundenen Beweisen nur bedingt an, zumal die Gefahr besteht, dass die SchülerInnen Begriffshülsen und Operationskalküle verwenden. Eine subjektive Realisierung und Manifestierung des Beweises befördern vielmehr selbstgeprägte Begriffs- und Wortbildungen der SchülerInnen und das Hinterfragen durch den Lehrenden. So bezeichnet die Grundschülerin Sonja den Deckstein einer Zahlenmauer der Höhe 3 etwa als „Doppelstein“, um auszudrücken, dass sich sein Wert um das Doppelte der Erhöhung des Wertes des unteren Mittelstein vergrößert. Die Grundschülerin Zaida vermittelt den entsprechenden formalen Beweis in derart abstrakt gehaltener Umgangssprache, dass sich der Deckstein bei ihr schließlich um „zwei irgendwasses“ erhöht.

Gerade weil *visual proofs* (Borwein & Jörgenson 2001) im Sinne „bildlich gebundener Beweise“ auf dem ersten Blick ohne mathematische Sprache auskommen, kann sich die Vermittlung des Allgemeingültigen an ihnen um so schwieriger gestalten. Nicht minder fordernd ist die eher den Experten geläufige kognitive und sprachlich vermittelte Übersetzungsarbeit zwischen Arithmetik und geometrischen Darstellungsformen. So nimmt die Grundschülerin Frieda beim gegensinnigen Verändern von Summanden deren figurierte Darstellung als Kästchentürme zwar bereitwillig an, sieht im Besonderen arithmetischer Aufgabenstellungen wie $3 + 4 + 5 = 3 \cdot 4$

aber bloß die je konkret figurierte Darstellung. Statt an weiteren Beispielen die Allgemeingültigkeit der Konstanz der Summe gegensinnig veränderbarer Summanden zu beweisen, übersieht die Grundschülerin Frieda die Bedeutung des Operationszeichen, ehe sie schließlich Malpunkte zwischen die gezeichneten Kästchentürme setzt. Dazu spricht sie allgemein: „man achtet nicht auf die Zeichen, man achtet nur auf die Zahlen beim Zeichnen".

Die Untersuchungen von Mason & Pimm (1984) relativierend, ist der Verzicht auf beispielhafte Formulierungen per se kein Indiz für die subjektive Realisierung des Allgemeingültigen, zumal zu allgemein Gesagtes auch falsch sein kann. Umgekehrt kann allgemeiner gedacht, aber dennoch Konkretes gesagt werden. Etwa schult das Beweisen an imaginierten Beispielen das Sprechen in allgemeiner Umgangssprache, wenn es beim Blick auf einen vollständigen Graphen mit 5 Ecken um die Frage nach der Anzahl der Kanten eines vollständigen Graphen mit 10 oder gar x Ecken geht. Das der Konkretion zunehmend enthobene Beispiel lässt die Schüler Martin und Ali an ihren Formeln $10 \cdot 4 / 2$ und $x \cdot y / 2$ selbst zweifeln. Zwischen der unvollständigen Generalisierung und Übergeneralisierung der Behauptung lässt sich für sie das Allgemeingültige erkennen und am Beispiel beweisen.

Literatur

Borwein, J. & Jörgenson, L. (2001): Visible structures in number theory. American Mathematical Monthly, 108, 897-911.

de Villiers, M. (1990): The role and function of proofs in mathematics. Pythagoras, 24, 17-24.

Mason, J. & Pimm, D. (1984): Generic examples: Seeing the general in the particular. Educational Studies in Mathematics, 15, 277-289.

Matheplanet (2008): Vollständiger Graph / Sternchen1987. Abgerufen am 15.03.2011: http://www.matheplanet.com/matheplanet/nuke/html/viewtopic.php?topic=101388

Meyer, M. & Voigt, J. (2009): Entdecken, Prüfen und Begründen. Gestaltung von Aufgaben zur Erarbeitung mathematischer Sätze. In: mathematica didactica, 32, 31- 66.

Oevermann, U., Allert, T., Konau, E. & Krambeck, J. (1979): Die Methodologie einer "objektiven Hermeneutik" und ihre allgemeine forschungslogische Bedeutung in den Sozialwissenschaften. In Soeffner, H. (Hrsg.): Interpretative Verfahren in den Sozial- und Textwissenschaften. Stuttgart: Metzler, 352-434.

Schwarzkopf, R. (2000): Argumentationsprozesse im Mathematikunterricht - Theoretische Grundlagen und Fallstudien. Hildesheim: Franzbecker.

Semadeni, Z. (1974): The Concept of Premathematics as a Theoretical Background for Primary Mathematics Teaching. Warschau: Polnische Akademie der Wissenschaften.

Wittmann, E. (1985): Objekte - Operationen - Wirkungen: Das operative Prinzip in der Mathematikdidaktik. In: mathematik lehren, 11, 1985, 7-11.

Wittmann, E. & Ziegenbalg, J. (2004): Sich Zahl und Zahl hochhangeln. In Müller, G., Steinbring, H., Wittmann, E. (Hrsg.): Arithmetik als Prozess. Seelze: Kallmeyer.