

Katharina KUHNKE, Dortmund

## **Vorgehensweisen von Zweitklässlern beim Wechsel zwischen verschiedenen Darstellungen von Zahlen und Operationen - Eine Untersuchung am Beispiel des multiplikativen Rechnens**

### **Darstellungswechsel im Mathematikunterricht**

Mathematische Sachverhalte können unterschiedlich dargestellt werden durch: *Handlungen, bildliche Darstellungen, symbolische Darstellungen* in der Umgangssprache oder in formaler Sprache. Diese konkreten Darstellungen müssen als Repräsentanten mathematischer Objekte verstanden werden. Daraus ergibt sich die besondere epistemologische Situation der Mathematik: Mathematische Objekte sind nicht physisch fassbar und brauchen daher immer Darstellungen. Es geht somit in der mathematischen Interaktion um den Umgang mit Darstellungen eines Objektes und nicht um den Umgang mit dem mathematischen Objekt selbst (u.a. Janvier 1987, Duval 2006). Der Wechsel zwischen Darstellungen ist somit eine elementare Tätigkeit im Mathematikunterricht. Auch empirische Befunde zum Darstellungswechsel gehen davon aus, dass dieser eine wichtige Fähigkeit im Mathematikunterricht ist. So wird der Darstellungswechsel als Indikator für ein umfassendes Operationsverständnis (vgl. u.a. Bönig 1995) gesehen, aber auch als unerlässliche Voraussetzung für erfolgreiches mathematisches Handeln (vgl. u.a. Janvier 1987, vom Hofe & Jordan 2009).

Mit großer Selbstverständlichkeit und oft unbewusst werden im Mathematikunterricht der Grundschule Darstellungen gewechselt. Aufgaben, wie beispielsweise zu einem vorgegebenen Bild einen (möglichst eindeutigen) passenden Term zu notieren, finden sich in vielen Unterrichtsvorschlägen. Zudem nutzen viele Lehrende die verschiedenen Darstellungsebenen eher als methodische Stufenfolge – von Handlungen über bildliche Darstellungen zur symbolischen Ebene – denn als gleichwertige Darstellungsformen mit gegenseitigen Beziehungen (Hahn 2006). Im praktizierten Unterricht wird oft zu schnell auf der mathematisch-symbolischen Ebene gearbeitet (vgl. u.a. Schipper 2005). Dabei darf im Unterricht nicht davon ausgegangen werden, dass den Kindern die gleiche mathematische Struktur innerhalb der verschiedenen Darstellungen bewusst ist.

Genau hier setzt das vorliegende Dissertationsprojekt an und geht der folgenden übergeordneten Fragestellung nach: Welche Kriterien nutzen Kinder, um Darstellungen zu wechseln bzw. herauszufinden, wann Darstellungen zueinander „passen“?

## **Forschungsinteresse und Design**

Neben dem Deuten von Darstellungen, bei welchem auch die Strukturierungsfähigkeit der Kinder eine Rolle spielt (Söbbeke 2005), steht nun auch das Interagieren mit verschiedenen Darstellungen im Mittelpunkt der Untersuchung. Studien zum Darstellungswechsel zeigen oft nur einen Aspekt bzw. eine Richtung der vielfältigen Transferprozesse auf (z.B. der Darstellungswechsel vom Bild zum Term). Zudem sind die meisten Studien produktorientiert: das Gelingen oder Nicht-Gelingen des Darstellungswechsels wird über das Ergebnis, welches der Lernende beim Wechsel von Darstellungen produziert, bewertet.

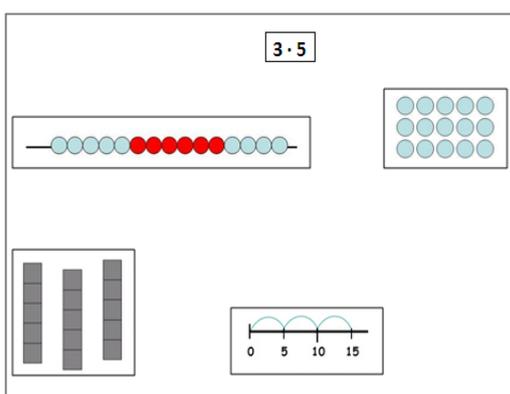
Der Schwerpunkt dieses Projekts ist die Betrachtung des Darstellungswechsels als Prozess. Um diesen sichtbar zu machen, ist ein mathematischer Inhalt nötig. In dieser Untersuchung wird das multiplikative Rechnen im 2. Schuljahr gewählt, auch deshalb, da weitgehend unbekannt ist, wie Kinder der Schuleingangsphase beim Transfer zwischen verschiedenen Darstellungen vorgehen.

Dem Forschungsinteresse entsprechend, wird ein qualitatives Verfahren zur Datenerhebung angewandt, bei dem versucht wird die Denkprozesse der Kinder zu erschließen. In klinischen Interviews wurden 15 Kinder aus sechs verschiedenen Klassen Aufgaben zu Transferprozessen vorgelegt und videographiert. Es wird von der Annahme ausgegangen, dass es beim Darstellungswechsel um die Herstellung von Deutungen von Zeichen durch die Kinder geht. Daher wird mit einer soziologisch-konstruktivistischen Perspektive, genauer mit dem epistemologischen Dreieck, der Prozess und die Kriterien herausgearbeitet, wie der Darstellungswechsel vollzogen wird. Somit können die Begriffskonstruktionen der Kinder zum Darstellungswechsel näher in den Blick genommen werden (Steinbring 2005).

Die konzipierten Interview-Aufgaben zielen dabei auf das Erkennen von Zusammenhängen zwischen möglichst mehreren verschiedenen Darstellungsebenen ab: „*Was passt und warum?*“ (Term ↔ Bild, Bild ↔ eigener Term, Bild ↔ Bild, Rechengeschichte ↔ Bild ↔ Term). Angelehnt an einen methodischen Vorschlag von Duval (Duval 2006) beim Darstellungswechsel gezielt variierende Momente einzubringen, wurde nach jeder Aufgabe die Ausgangsdarstellung variiert und nach deren Auswirkung in den anderen Darstellungsebenen gefragt.

## Ergebnisse

Der Darstellungswechsel, aus epistemologischer Perspektive betrachtet, lässt sich als Abgleich von Referenzkontexten beschreiben. Darstellungswechsel stellen keine linearen Prozesse dar, sondern zeigen sich als stetiges Wechselspiel zwischen Deutungen und Verbindungsherstellung zwischen verschiedenen Deutungen. Die interviewten Kinder ziehen zunächst den Referenzkontext einer Darstellung (Ausgangsdarstellung) heran, welchen sie dann zum Abgleich mit den anderen Darstellungen nutzen. Die Kinder fokussieren dabei auf bestimmte **Relationen**, **Einzelemente** oder **Anzahlen** bzw. **Ergebnisse**, die sie in den weiteren Darstellungen suchen, um diese als zueinander passend zuzuordnen. Dabei können diese Fokussierungen auch zusammenwirken, wie das Beispiel von Kieran bei der folgenden Aufgabe (siehe Abb. unten) zeigt. Hier soll er bestimmen, welche bildliche Darstellung zu dem gegebenen Term  $3 \cdot 5$  passt und seine Auswahl begründen. Bei der Rechenkette, die aufgrund ihrer Strukturierung besonderen Gesprächsanlass bietet, sagt Kieran:



„Das passt, die Lösung ist gleich, das sind auch fünfzehn eh warte mal, es würde passen, wenn hier fünf wären und hier fünf und hier fünf *zeigt auf alle drei Bündelungen.* [...] sind ja fünf sechs und vier (5) ich meine, das passt so gut nicht (.) das passt schon von der Anzahl von der Lösung her, sonst eigentlich nicht [...] das würde dann nen bisschen schwer zu erkennen sein, drei mal fünf

ergibt gleich das da (.) *legt Term und Rechenkette direkt hintereinander.*“

Kieran schwankt hier zwischen den **Fokussierungen auf eine Relation** der Elemente (sein Referenzkontext zum gegebenen Term  $3 \cdot 5$  sind drei Fünfer) und damit verbunden auf die Anordnung „wenn hier fünf wären und hier fünf und hier fünf“ und der **Fokussierung auf das Gesamtergebnis** („sind auch fünfzehn“). Seinen Deutungen liegen verschiedene Begriffe des Darstellungswechsels zugrunde, die beide zur Deutung und zum Abgleich zwischen den zwei Darstellungen herangezogen werden können. Kierans Begriff eines Darstellungswechsels umfasst den Abgleich sowohl der gleichen repräsentierten Menge, als auch der gleichen repräsentierten Relationen. Das Zusammenwirken beider Fokussierungen wird daran deutlich, dass er länger zwischen „nicht so gut passen“ und „von der Lösung her passen“ überlegt. Schlussendlich entscheidet sich Kieran dafür, dass die Aufgabe

3·5 in der gegebenen bildlichen Darstellung etwas schwierig zu erkennen sei. Die bildliche Darstellung eignet sich dann „lediglich“ als Mengendarstellung des Ergebnisses. Term und bildliche Darstellung so hintereinander gelegt, ergeben eine für ihn sinnvolle Äquivalenz der Menge.

## **Diskussion und Ausblick**

Mit den Analysen kann gezeigt werden, dass spezifische Fokussierungen vorliegen, die bei einem Wechsel von Darstellungen herangezogen werden können. Jedes hier untersuchte Kind vollzieht einen Darstellungswechsel, fokussiert allerdings auf unterschiedliche Aspekte in den Darstellungen. Die verschiedenen Fokussierungen, die Kinder beim Darstellungswechsel einnehmen, sind Momentaufnahmen. Kinder können zwischen den Fokussierungen wechseln – abhängig vom Aufgabenkontext, den Impulsen der Interviewerin, der Entwicklung innerhalb des Interviews. Diese verschiedenen Vorgehensweisen der Kinder zeigen verschiedene Deutungen des Begriffs „passen“. Daher scheint eine veränderte Sichtweise auf die Anforderungen beim Wechsel von Darstellungen angebracht. Einer expliziten Thematisierung des Darstellungswechsels, des Begriffs „passen“ und der Deutungsvielfalt beim Darstellungswechsel sollte im Unterricht Zeit und Raum eingeräumt werden.

Möglichkeiten und didaktische Anregungen zu entwickeln, welche die Transferprozesse zwischen Darstellungen explizieren, anregen und fördern, stellen den nächsten Schritt in diesem Projekt dar.

## **Literatur**

- Bönig, D. (1995): Multiplikation und Division. Empirische Untersuchungen zum Operationsverständnis bei Grundschulern. Münster, New York: Waxmann.
- Duval, R. (2006): A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. In: Educational Studies in Mathematics. 103-131.
- Hahn, H. (2006): Mathematikunterricht in der 3. Jahrgangsstufe- ein Einstellungsbild Thüringer Lehrerinnen und Lehrer. In: Schriften zur Bildungsforschung 1.
- Janvier, C. (1987). Problems of representation in the teaching and learning of mathematics. Hillsdale, N.J. [u.a.]: Erlbaum.
- Schipper, W. (2005): Rechenstörungen als schulische Herausforderung. Beschreibung des Moduls 4 für das Projekt Sinus-Transfer Grundschule.
- Söbbeke, E. (2005). Zur visuellen Strukturierungsfähigkeit von Grundschulkindern- Epistemologische Grundlagen und empirischen Fallstudien zu kindlichen Strukturierungsprozessen mathematischer Anschauungsmittel. Hildesheim: Franzbecker.
- Steinbring, H.(2005): The Construction of New Mathematical Knowledge in Classroom Interaction – an Epistemological Perspective. Mathematics Education Library (ME-LI), No. 38, Springer, Berlin, Heidelberg.
- Vom Hofe, R. & Jordan, A.(2009): Wissen vernetzen. In: mathematik lehren Nr.159, 4-9.