

Hans-Stefan SILLER, Salzburg

Funktionen und deren Repräsentationen als „Big Idea“ für den (Mathematik-)Unterricht

Wissensaufbau zum Funktionsbegriff im Mathematikunterricht sollte über alle Schulstufen hinweg gefördert werden. Dabei sollen Lernende ein entsprechendes Wissensnetz aufbauen. Dazu ist es jedoch notwendig, wie durch die Curricula vorgegeben, das Wissen über funktionale Abhängigkeiten auf unterschiedlichen Niveaus – im Sinne des Spiralprinzips – aufzubereiten. Dies gelingt insbesondere dann, wenn sich der Mathematikunterricht an einem durchgängigen Konzept orientiert. Solchen übergreifenden Konzepten widmet sich das EU-Projekt ABCmaths. Entsprechend der Betonung von „Big Ideas“ im Unterricht steht auch die Berücksichtigung unterschiedlicher Repräsentation von Funktionen im Mittelpunkt. Somit können sachgerechte Interpretationen, die durch Modellierungen konstruiert wurden, richtig dargestellt und mit den zugehörigen Graphen in Beziehung gesetzt werden. Durch entsprechende Berücksichtigung zentraler Ideen im Unterricht wird das kompetenzorientierte Lernen ermöglicht und gefördert.

1. Was sind „Big Ideas“?

Unter dem Begriff „Big Ideas“ im Projekt ABCmaths werden Ideen bzw. Vorstellungen verstanden, welche sich durch die gesamte Schulmathematik ziehen und die Möglichkeit bieten Lerngelegenheiten curricular und sinngenerierend zu strukturieren sowie dazu beitragen, das Verstehen und das Kommunizieren dieses Wissens in einem allgemeineren Zusammenhang zu fördern. Zudem unterstützen sie Lehrkräfte beim Gestalten von begriffsbezogenen, kognitiv aktivierenden Lerngelegenheiten.

Ansätze zu „fundamentalen Ideen“, z.B. Schweiger (1992), „Grundvorstellungen“, z.B. v. Hofe, (1992), „zentralen Ideen“, Klika (2003) integrierend soll die Orientierung des Mathematikunterrichts an großen Ideen das Sprechen über Mathematik erleichtern, das Erkennen und Verfolgen eines „roten Fadens“ durch mathematische Themengebiete unterstützen und die Vernetzung zwischen unterschiedlichen Themengebieten fördern.

Für Lehrkräfte werden Reflexionsanlässe geschaffen, die mit derartigen Ideen verknüpft sind und zur Weiterentwicklung der eigenen Unterrichtspraxis beitragen.

2. Funktionen/Funktionales Denken als Big Idea

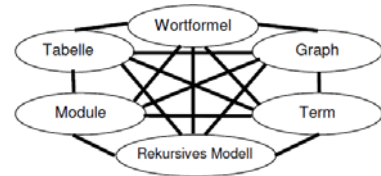
Funktionen spielen sowohl in der Mathematik als auch im Alltag eine herausragende Rolle. Sie beschreiben die Beziehung bzw. die Abhängigkeit, die zwischen Elementen einer (oder verschiedener) Mengen besteht –beispielsweise kann jedem Quadrat der Flächeninhalt, jeder Ware der Preis, jedem Menschen das Alter zugeordnet werden.

Eine Klärung des Funktionsbegriffs soll im Mathematikunterricht stattfinden, jedenfalls sollte der Mathematikunterricht in Inhalten und Gestaltung von der Idee der Funktion durchdrungen sein. Durch Funktionen werden Zusammenhänge erfasst, beschrieben, und/oder quantifiziert. Funktionen stellen wesentliche Aspekte fundamentaler Ideen bereit, da sie für die Mathematik von großer Tragweite und für das kulturelle Verständnis der Mathematik unentbehrlich sind. Gesetzmäßigkeiten (der Natur) sind ohne das Verständnis über funktionale Zusammenhänge kaum vorstellbar. Die Entwicklung des Funktionsbegriffs bzw. der Funktion ist auch in der historischen Entwicklung der Mathematik darstellbar, Funktionen stellen ein tragfähiges Konstrukt dar um curriculare Entwürfe vertikal zu gliedern, sie leiten zum Sprechen über Mathematik an und besitzen einen sprachlichen und handlungsmäßigen Archetyp in der Sprache und dem Denken des Alltags (vgl. Schweiger, 2010). Zum Erlernen des Funktionsbegriffs gibt es aus fachdidaktischer Sicht unterschiedliche Phasenmodelle zum Begriffsverständnis. Jene mit erheblichem Einfluss auf die fachdidaktische Literatur sind das Modell nach Malle (2000), nach Sfard (1991) und nach Vollrath & Weigand (2007). Die Entwicklung des Funktionsbegriffs kann in vier Stufen erfolgen, die Vollrath & Weigand (2007) ausführlich charakterisieren:

Vollrath & Weigand (2007) merken an, dass sich die gesamte Fülle des Funktionsbegriffs erst bei der Bearbeitung von Themengebieten aus der Analysis in der Sekundarstufe II zeigt. Dafür müssen allerdings bereits in der Sekundarstufe I die Voraussetzungen geschaffen werden. Diese werden vorwiegend durch Beispiele und Darstellungen bestimmt, nicht durch formale Definitionen. Bei der Einführung von Funktionen sollte das Gewicht deshalb nicht zu stark auf einen formal-korrekten Umgang gelegt werden, sondern vielmehr darauf, dass Vorstellungen in geeigneter Weise ausgebildet werden. Dies wird von Vollrath & Weigand (2007, S. 159) betont: „In erster Linie geht es also um das Wecken angemessener Vorstellungen und erst auf dieser Grundlage dann um korrektes Arbeiten mit dem Begriff.“

3. Möglichkeiten einer Umsetzung

Dörfler (1991) hat angemerkt, dass mathematische (Allgemein-)Begriffe in der Regel durch Erfahrung und Begegnung mit prototypischen Repräsentanten erworben werden. D.h. Funktionen werden zu Beginn des Lernprozesses nicht durch eine „saubere“ Definition erlernt, sondern die Vorstellungen der Lernenden werden maßgeblich durch Beispiele und Darstellungen bestimmt. Man muss daher verschiedene Prototypen dieses Begriffes anhand von Beispielen aus der Erfahrungswelt erlebbar machen, sodass verschiedenen Prototypen des Funktionsbegriffs erlernt und miteinander in Beziehung gesetzt werden, wie in der obigen Graphik, nach Bleier (2009, S. 13), deutlich wird. Bei der Erarbeitung im Unterricht sollen vor allem das Kennen und der Nutzen verschiedener Sachverhalte von Funktionen im Mittelpunkt stehen, also insbesondere die nachfolgend aufgelisteten Aspekte angesprochen werden:



- Zuordnungsaspekt
- Kovariationsaspekt
- Objektaspekt
- Wechsel zwischen den Darstellungsformen

Diese Aspekte sollen in jeder Altersstufe entsprechend dem Wissenstand angesprochen werden, sodass der Einseitigkeit des Funktionsverständnisses hinsichtlich algebraischer Ausdrücke entgegengewirkt und in den Unterricht begriffsentwickelnde Phasen eingebaut werden können. Entsprechende Beispiele dazu finden sich auf dem Content-Management-System des Projekts ABCmaths (www.abcmaths.de). Anhand einer gegebenen Aufgabenstellung (wie z.B. in „Snack and Smile“ dargestellt) werden Fragestellungen zu oben angeführten Aspekten auf unterschiedlichen Niveaus angeführt.

Snack and Smile

Ein Team aus drei Jungunternehmern möchte eine Firma gründen, die gesunde Snacks produziert und diese direkt an den Arbeitsplatz der Abnehmer liefert. Damit sich die Geschäftsidee rentiert, überlegen sich die drei Jungunternehmer, welche Kosten in welcher Höhe anfallen werden. Um einen besseren Überblick über die Entwicklung der voraussichtlichen Kosten zu erhalten, sollen für einige Kosten die jeweiligen Kostenverläufe dargestellt werden.



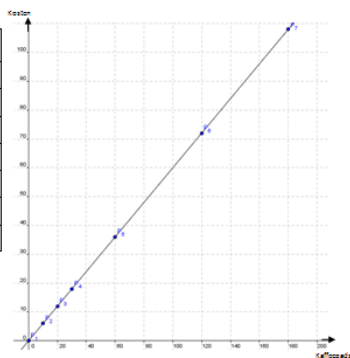
Entscheidend ist, dass die Aufgabenstellung sowohl in der Sekundarstufe I als auch in der Sekundarstufe II in selber Weise verwendet werden kann. Lediglich die Art der Fragestellung ändert sich entsprechend der Jahrgangsstufe auf der sie thematisiert werden soll. Die angeführten Aspekte des Funktionsbegriffs werden durch allfällige Fragestellungen ausgewiesen. In der Sek. I kann durch eine konkrete Fragestellung z.B. eine Betonung des Zuordnungsaspekts (nachfolgend dargestellt) erfolgen.

Vervollständigt die Wertetabelle und tragt die Ergebnisse ins koordinatensystem ein.

Wertetabelle:

	Anzahl der Kaffeespäcke	Kosten
F_1	0	0 €
F_2	10	6 €
F_3	20	12 €
F_4	30	18 €
F_5	60	36 €
F_6	120	72 €
F_7	180	108 €

Graph:



Lernende müssen auf Basis einer konkreten Fragestellung die dargestellte Tabelle ausfüllen sowie den Graph der Funktion darstellen. Eine Hinführung zum Wechsel zwischen den Repräsentationsformen kann vorbereitet werden. Durch eine Änderung der Art der Fragestellung kann die Betonung anderer Aspekte erfolgen – z.B. des Objektaspekts in der Sek. II (untenstehend dargestellt).

Danksagungen

Das Project ABCmaths wird mit Unterstützung der Europäischen Kommission (503215-LLP-1-2009-1-DE-COMENIUS-CMP) finanziert. Diese Veröffentlichung gibt lediglich die Sichtweise des Autors wieder. Die Kommission haftet nicht für

jedwede Nutzung der in diesem Beitrag enthaltenen Informationen. Ich danke den Kooperationspartnerinnen und -partnern in ABCmaths, Sebastian Kuntze, Stephen Lerman, Bernard Murphy, Peter Winbourne, Elke Kurz-Milcke, Anke Wagner, Claudia Wörn, Karl-Josef Fuchs, Christiane Vogl und Michael Schneider.

Literatur

- Bleier, G. (2009): Längsschnitt Funktionale Abhängigkeiten. In: Didaktikhefte der ÖMG, 42, 11-20.
- Dörfler, W. (1991): Der Computer als kognitives Werkzeug und kognitives Medium, In: Computer – Mensch – Mathematik. Wien: hpt, 51-68.
- Klika, M. (2003): Zentrale Ideen – echte Hilfen. mathematik lehren, Nr. 119, 4-7.
- Malle, G.: Zwei Aspekte von Funktionen: Zuordnung und Kovariation. In: mathematik lehren, Nr. 103, 8-11.
- Schweiger, F. (1992): Fundamentale Ideen. Eine geistesgeschichtliche Studie zur Mathematikdidaktik. In: JMD, 13, 199-214.
- Sfard, A. (1991): On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. In: Educational Studies in Mathematics, 22(1), 1-36.
- Vollrath, H.-J.; Weigand H.-G. (2007): Algebra in der Sekundarstufe. 3. Aufl., Heidelberg: Spektrum.
- v. Hofe, R. (1992). Grundvorstellungen mathematischer Inhalte als didaktisches Modell. In: JMD, 13(4), 345-364.

Aus den Unternehmensdaten von drei Betrieben können die folgenden Kostenverläufe entnommen werden:

linearer
Kostenverlauf

Welche der folgenden Aussagen trifft auf welchen Kostenverlauf zu?

Aussage 1 Die Kosten für die Produktion eines Stückes nehmen mit zunehmender Produktionsmenge zu.

Aussage 2 Die Kosten für die Produktion eines Stückes bleiben mit zunehmender Produktionsmenge gleich.

... ..

Welche Ursachen liegen den Kostenverläufen zugrunde?

Ursache 1 Das Unternehmen hat sich auf die Produktion von Hobelrsten aus Lärche spezialisiert. Deshalb werden größere Mengen derselben Holzart eingekauft, was zur Gewährung von Mengenrabatten führt.

Ursache 2 Die Kapazitäten einer Tischlerei sind ausgelastet. Dennoch muss ein Auftrag eines Stammkunden angenommen werden. Die Mitarbeiter machen Überstunden, welche mit einem höheren Stundensatz abgerechnet werden.