Brigitte LENEKE, Magdeburg

Von anderen „Grafen“ – Knoten, Wege, Rundreisen und Gerüste im Mathematikunterricht

1. Einleitung

In den letzten Jahren ist die Graphentheorie als wichtiges Teilgebiet der Diskreten Mathematik wohl zu Recht zur „Grafenwürde“ gelangt. Viele moderne Entwicklungen und Fragestellungen erfordern zunehmend mehr Methoden aus diesem Gebiet der Mathematik. Überall dort, wo netzartige Strukturen (Computernetze, Versorgungsnetze, Verkehrsnetze, wirtschaftliche Verflechtungsbeziehungen) zu analysieren und zu bearbeiten sind, finden „Graphen“ als Modelle Anwendung. Die Modellbildung steht also bei jeder Problemlösung im Mittelpunkt. Aus ihrem eigenen Umfeld können die Schülerinnen und Schüler leicht selbst Problemstellungen beschreiben und bearbeiten. Das Spektrum der graphentheoretischen Lösungsmethoden ist so breit (Nutzung intuitiver, heuristischer und algorithmischer Verfahren), so dass Schülerinnen und Schüler aller Leistungsgruppen einen unbefangenen Zugang zu den Themen bekommen. Ein anwendungs-, problemorientierter und auch offener Unterricht liegt mit diesem Themenfeld auf der Hand. Für das Verständnis der Graphentheorie sind nur geringe Vorkenntnisse aus anderen Gebieten der Mathematik erforderlich. Die Schülerinnen und Schüler können auf einer sehr anschaulichen Basis Lösungsvorschläge machen, ohne dass sehr viele Fachbegriffe notwendig sind. In Abhängigkeit von der zu bearbeitenden Problemstellung kann die Begriffsbehandlung begleitend realisiert werden.

2. Didaktisch-methodische Orientierung

Die **Modellbildung** steht bei jeder Problemlösung im Mittelpunkt. Zunächst werden in Verbindung mit den hervorragenden Visualisierungsmöglichkeiten einige notwendige Begriffe eingeführt, die dann durch die Bearbeitung typischer graphentheoretischer Fragestellungen ausgehend von praktischen Problemstellungen gefestigt werden. Die genutzten Lösungsverfahren haben algorithmischen und auch heuristischen Charakter. Sie können sowohl für die Untersuchung von Existenzproblemen, als auch von Anzahl- bzw. Optimierungsproblemen (vgl. Abb. 1) ausgewählt werden. So kann den Lernenden u. a. am Beispiel des „Kürzesten – Wege – Problems “ dies über das Finden **eines** „Weges“ vom Ort A zum Ort B, über das Suchen nach **weiteren** Wegen bis zum „Herausfiltern“ des **„besten“** Weges sehr anschaulich verdeutlicht werden.

Problemkreise	Ziele des MU
Existenzprobleme	Argumentieren, Begründen, Beweisen
Anzahlprobleme	Argumentieren, Kombinatorik
Optimierungsprobleme	Heuristisches und algorithmisches Arbeiten

Abb. 1

Die Bearbeitung dieser drei Problemkreise ist auf unterschiedlichen Erkenntnisebenen möglich und von daher sowohl im Sekundarbereich I als natürlich vor allem auch im Sekundarbereich II möglich. Die Lernenden können spielerisch-experimentell Rundreisen realisieren und gestalten, intuitiv-heuristisch die kürzeste Rundreise finden, aber z. B. auch algorithmisch „Gerüste“ auf Graphen konstruieren. Dabei entdecken sie, dass es „leichte“ und „schwere“ Probleme gibt und vervollständigen so ihr Bild von der Mathematik. In kooperativen Unterrichtsformen ist es möglich, verschiedene Lösungsansätze (Modelle) zu diskutieren, Verfahren zu bewerten, Strategien zu entwickeln und weiterführende Frage- und Problemstellungen zu formulieren. Inner- und außermathematische Vernetzungen ergeben sich dabei wie von selbst. Die unterrichtlichen Potenzen des Gebietes „Graphentheorie“ seien in folgenden Punkten zusammenfassend dargestellt:

a) zahlreiche Anwendungssituationen und Anwendungsbezüge
b) anschauliche Modelle (Visualisierung!)
c) Vernetzungen zu anderen Gebieten der Mathematik, des Mathematikunterrichts und anderer Unterrichtsfächer
d) Lösungsstrategien entwickeln, kennen lernen und festigen, z. B. Heuristiken (Rundreiseproblem) und Algorithmen (Minimalgerüstproblem)
e) Bild von Mathematik formen – „leichte“ und „schwere“ Probleme (Motivation!)
f) Offene Unterrichtsformen und Aufgabenstellungen

3. Zur Behandlung von Grundbegriffen

Weniger ist hier mehr! Durch kleinere und übersichtliche Aufgaben können die Lernenden mit Knoten, Kanten, gerichteten und ungerichteten Graphen, Wegen und Bäumen, Teilgraphen und Gerüsten …bekannt gemacht werden. Es ist maßgeblich von der Unterrichtssequenz abhängig, wie breit und tief der zur Verfügung stehende Begriffsapparat werden sollte. Die Palette ist groß!! Ausgangspunkt sollte eine sehr anschauliche Situation sein. Es werden die Begriffe „Graph“, „Knoten“ und „Kante“, „gerichteter Graph“, „bewerteter Graph“ erarbeitet. Dabei sollen anhand des Beispiels eines Straßennetzes einer Stadt und wesentlicher Institutionen (Schule, Einkaufszentrum, Stadtpark, Krankenhaus) die Äquivalente in der Graphentheorie (Modell) gefunden werden (vgl. Abb. 2 und 3).

Abb. 2 Stadtplan

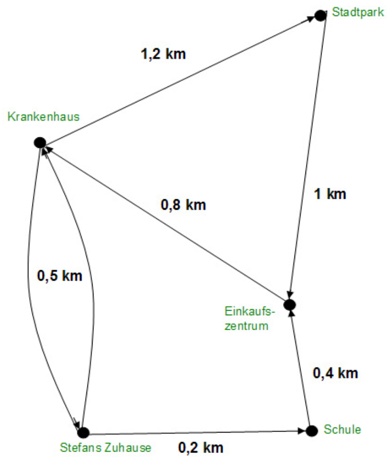

Abb. 3 Bewerteter gerichteter Graph

4. Kürzeste Wege, Rundreisen und Gerüste

Die Suche nach kürzesten Wegen in Graphen, nach Rundreisen und kürzesten Rundreisen sowie nach Minimalgerüsten eröffnet im Unterricht die Möglichkeit, sowohl heuristische als auch algorithmische (wenn überhaupt möglich) Lösungsvarianten und –strategien einzubeziehen.

Beispiel :

Das Pizza-Hut-Restaurant befindet sich in Magdeburg in der Kantstraße

(Knoten a). Von dort aus werden auch die Bestellungen außer Haus geliefert. Der folgende Graph zeigt Adressen, zu denen ein Pizza-Bote die Bestellungen bringen soll. Die Kantenbewertungen stellen die Entfernungen in km dar. Finde den kürzesten Weg von Knoten a zum Knoten d. Schreibe in Stichpunkten deine Vorgehensweise auf.

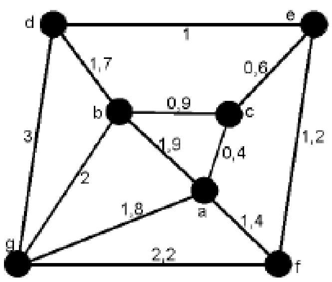

Abb. 4

Die Schülerinnen und Schüler können dieses Problem intuitiv lösen.

Es besteht aber auch die Möglichkeit, die Idee einer algorithmischen Vorgehensweise (Dijkstra-Algorithmus) zu erarbeiten und umzusetzen.

Führt man dieses Problem weiter und fragt danach, ob es in einem Graphen eine „Rundreise“ gibt, bei der jede Kante genau einmal „durchlaufen“ wird und man zum Ausgangspunkt zurückkehrt, ist dies die Frage nach einem speziellem Rundweg – dem Eulerkreis. Das Finden eines Eulerkreises auf einem Graphen könnte mit den Schülerinnen und Schülern ebenfalls algorithmisch gelöst werden (Algorithmus von Hierholzer oder Algorithmus von Fleury). Jedoch wäre der historische Zugang über das berühmte „Königsberger Brückenproblem“ auch ohne eine algorithmische Lösung denkbar.

Im Unterschied zum Finden eines Eulerkreises auf einem Graphen ist die Lösung eines weiteren „Rundreiseproblems“ etwas anders zu realisieren. Hier treten bei dem berühmten „Traveling–Saleman–Problem“ (TSP) heuristische Vorgehensweisen in den Vordergrund. In einem vollständigen Graphen mit 7 Knoten gibt es 360 Rundreisen (Existenz- und Anzahlproblem)! Die Lernenden erkennen die Schwierigkeit: einfach Durchprobieren dauert zu lange und ist bei größerem n kaum möglich. Die Lernenden erkennen sehr schnell, dass die Vorgehensweise, immer von einem Ort ausgehend die nächstgelegene Stadt zu besuchen, nicht immer zum besten Ergebnis führt und sie suchen automatisch nach anderen Wegen, noch kürzere Rundreisen zu finden. So besitzt der Graph in Abb. 4 zwar einen Hamilton-Kreis (e-d-g-b-c-a-f-e), allerdings ergibt sich sofort die Frage, ob diese Rundreise auch die kürzeste ist.

Dem gegenüber kann das Finden eines Minimalgerüstes wieder algorithmisch, z. B. mit dem Algorithmus nach Kruskal gelöst werden. Für die algorithmische Umsetzung finden die Lernenden die Idee des Algorithmus relativ selbstständig.

Anhand weiterer praktischer Problemstellungen (z. B. Energieverbundnetz einer Region) können die Lernenden zunächst den jeweiligen Graphen konstruieren (Modellierung), ein Gerüst bestimmen (Existenzproblem), verschiedene Gerüste bestimmen (Anzahlproblem) und dann das Minimalgerüst ermitteln (Optimierungsproblem).

Literatur

Leneke, B. (2010). Graphentheorie im Mathematikunterricht – Von Knoten, kürzesten Wegen und Gerüsten. Technical Report Nr. 4, 2010, Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg, Fakultät für Mathematik

http://www.math.unimagdeburg.de/document/TechRepGraph10Leneke.pdf