

Elisabeth LORENZ, Freydis VOGEL, Frank FISCHER, Ingo KOLLAR, Kristina REISS, München, & Stefan UFER, Kiel

## **ELK-Math: Effekte von inhaltsübergreifenden und inhalts-spezifischen Ansätzen zur Förderung mathematischer Argumentationskompetenz von Lehramtsstudierenden**

Nationale und internationale Curricula konzentrieren sich zunehmend auf Prozesse mathematischen Arbeitens, die komplexe mathematische Kompetenzen notwendig machen. Das Projekt ELK-Math<sup>1</sup> fokussiert eine dieser Kompetenzen, nämlich das mathematische Argumentieren.

### **1. Mathematische Argumentationskompetenz**

Im Projektkontext wird mathematische Argumentationskompetenz anhand von Ansätzen aus der Mathematik, Philosophie und Psychologie konzeptualisiert und beinhaltet sowohl eine inhaltspezifische, individuell-kognitive, als auch eine inhaltsübergreifende, sozial-diskursive Komponente. Auf der individuell-kognitiven Ebene beschreibt mathematische Argumentationskompetenz im Sinne einer Kompetenz nach Weinert (2001) die Fähigkeit und Bereitschaft, eine mathematische Aussage zu finden, zu generieren und zu evaluieren, aber auch nach adäquaten Argumenten für und gegen diese Aussage zu suchen. Zusätzlich sollen die Argumente zu einem Beweis zusammengeführt werden, der das Endergebnis des Argumentationsprozesses darstellt. Die sozial-diskursive Komponente beinhaltet die Fähigkeit zum Austausch von Argumenten im Rahmen eines kooperativen Dialogs zwischen zwei oder mehr Lernenden.

Untersuchungen belegen, dass Schülerinnen und Schüler im Hinblick auf das Argumentieren große Defizite haben (z.B. Reiss, Klieme & Heinze, 2001). Aber auch angehende oder bereits im Beruf stehende Lehrkräfte haben oft nur ein eingeschränktes Verständnis über Konzepte und Prinzipien beim Beweisen (z.B. Tabach et al., 2010). Mathematisch zu argumentieren im obigen Sinne gehört aber zu den alltäglichen Tätigkeiten einer Lehrkraft und sollte gefördert werden. Ziel des Projekts ist es daher, Effekte unterschiedlicher Instruktionen auf die mathematische Argumentationskompetenz bei Studienanfängern eines Lehramts zu untersuchen.

---

<sup>1</sup> Das Projekt wird von der Deutschen Forschungsgemeinschaft gefördert (Förderkennzeichen: RE 1247/9-1).

## **2. Inhaltsspezifische Instruktion: Heuristische Lösungsbeispiele**

Traditionelle Lösungsbeispiele präsentieren nicht nur ein Problem und die zugehörige Lösung, sondern auch einzelne Lösungsschritte eines Experten. Ziel der Arbeit mit Lösungsbeispielen ist der Erwerb von – durchaus flexibel einsetzbaren – Lösungsschemata. Vorteile von Lösungsbeispielen gegenüber dem in der Unterrichtspraxis oft üblichem Problemlösen können mit der Cognitive Load Theory erklärt werden (Sweller, van Merriënboer & Paas, 1998). Demnach ist das Arbeitsgedächtnis in seiner Kapazität begrenzt. Problemlösen in einem frühen Stadium des Lernprozesses stellt hohe Anforderungen an das Arbeitsgedächtnis, wodurch das Lernen im Sinne einer Konstruktion von Schemata erschwert werden kann. Im Gegensatz dazu kann sich ein Lerner, der mit einem Lösungsbeispiel arbeitet, voll und ganz auf die der Lösung zugrunde liegenden Ideen konzentrieren. Allerdings lassen sich komplexe mathematische Probleme, wie etwa Beweisprobleme, häufig nicht durch einfach kommunizierbare Schemata lösen, da hier heuristische Vorgehensweisen an Bedeutung gewinnen (z.B. Schoenfeld, 1983).

Im Konzept der heuristischen Lösungsbeispiele vereinen Reiss und Renkl (2002) die Ideen von traditionellen Lösungsbeispielen mit den Erfordernissen komplexer mathematischer Problemtypen. Hierbei wird keine Expertenlösung, sondern ein realistischer Bearbeitungsprozess dargestellt, der sowohl tentative als auch explorative Schritte einschließt. In Anlehnung an ein Prozessmodell der entsprechenden Kompetenz werden relevante heuristische Strategien vermittelt. Zusätzlich wurden im Projekt ELK-Math Selbsterklärungsprompts eingesetzt, die sich auf heuristische Strategien beziehen. Empirische Untersuchungen bestätigen die Effektivität von heuristischen Lösungsbeispielen für den Erwerb komplexer mathematischer Kompetenzen (z.B. Reiss et al., 2006).

## **3. Inhaltsübergreifende Instruktion: Kooperationskripts**

In der Vergangenheit wurden heuristische Lösungsbeispiele bereits in Dyaden eingesetzt. Aus der Forschung zum kooperativen Lernen ist aber bekannt, dass Lernende oft nur suboptimal miteinander kooperieren, wenn ihre Interaktion nicht strukturiert wird (Cohen, 1994). Eine solche Strukturierung kann durch Kooperationskripts realisiert werden (Kollar, Fischer & Hesse, 2006). Diese verteilen unter den Lernenden einer Kleingruppe verschiedene Rollen und Aktivitäten, die in einer bestimmten vorgegebenen Reihenfolge ausgeführt werden sollen. Untersuchungen belegen positive Effekte auf die Qualität der Argumentationen, aber auch auf den Wissenserwerb im Inhaltsbereich (Weinberger, Ertl, Fischer & Mandl, 2005).

#### 4. Forschungsfragen und Design der Studie

Eine Hauptfragestellung im Projekt ELK-Math betrifft die Wirksamkeit von heuristischen Lösungsbeispielen und Kooperationskripts auf die individuell-kognitive Komponente mathematischer Argumentationskompetenz. Zur Untersuchung dieser Fragestellungen wurde ein 2x2 Design mit den Faktoren *heuristisches Lösungsbeispiel* und *Kooperationskript* (jeweils vorhanden/nicht vorhanden) eingesetzt. Die Gruppen ohne heuristisches Lösungsbeispiel erhielten dieselben Problemstellungen wie die Gruppen mit heuristischem Lösungsbeispiel, sollten die Lösung aber selbst erarbeiten. Die Stichprobe umfasst 119 Studienanfänger eines Lehramts mit Unterrichtsfach Mathematik, die sich in etwa gleichmäßig auf die vier Treatmentgruppen verteilen. Die Instruktionen wurden in einer computerbasierten Lernumgebung implementiert. Die Lerner bearbeiteten in Dyaden in drei Sitzungen zu je 45 Minuten drei Problemstellungen bzw. Lösungsbeispiele aus dem Bereich der elementaren Zahlentheorie.

In einem Prä-Post-Design wurde ein dreiteiliger Test zur Messung der individuell-kognitiven Komponente mathematischer Argumentationskompetenz im Bereich der elementaren Zahlentheorie eingesetzt. Der erste Teil beinhaltet fünf Items, die Argumentationen mit Hilfe von Teilbarkeitsregeln erfordern. Der zweite Teil besteht aus sechs Items zum Beweisen, und der dritte Teil enthält ebenfalls sechs Items zum Umgang mit offenen Vermutungen („Beweise oder Widerlege“).

#### 5. Erste Ergebnisse

Die Mittelwerte der vier Gruppen im Nachtest, korrigiert nach den Vortestwerten, können der Abbildung 1 entnommen werden.

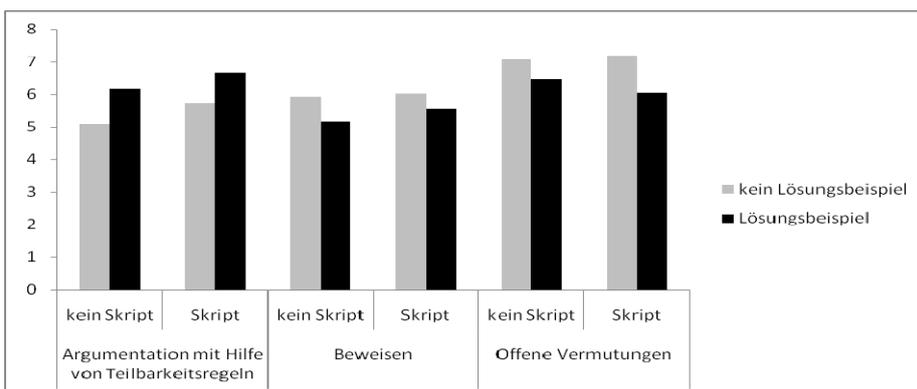


Abbildung 1: Korrigierte Mittelwerte im Nachtest

Zweifaktorielle Varianzanalysen mit Kovariate (Vortestleistung) zeigten im ersten Teil einen signifikanten Effekt für den Faktor *heuristisches Lösungsbeispiel* ( $F(1, 114)=6.6$   $p < .05$ ;  $\Omega^2=.05$ ). Bei der Skala zum Beweisen

ergab sich ein höherer Lernerfolg für die Gruppe ohne Lösungsbeispiel ( $F(1, 114)=2.3$   $p=.14$ ;  $\Omega^2=.02$ ). Ein ähnliches Ergebnis mit signifikantem Effekt konnte für den Umgang mit offenen Vermutungen festgestellt werden ( $F(1, 114)=6.0$   $p <.05$ ;  $\Omega^2=.05$ ). Für den Faktor *Kooperationskript* zeigten sich in allen drei Teilen positive Effekte, die jedoch die statistische Signifikanz verfehlten. Auch Interaktionseffekte wurden nicht signifikant.

Diese Ergebnisse liefern einen ersten Eindruck von den Effekten von heuristischen Lösungsbeispielen und Kooperationskripts auf den Erwerb individuell-kognitiver, mathematischer Argumentationskompetenz. Die Ergebnisse sind jedoch in Bezug auf unterschiedliche Outcomes nicht einheitlich und erfordern detailliertere Analysen. Ein erster Schritt dazu ist eine intensive Analyse der Prozessdaten aus der Arbeit der Studienanfänger in der Lernumgebung. Zusätzlich werden in weiteren Analysen die Effekte auf die sozial-diskursive Komponente untersucht.

## Literatur

- Cohen, E. (1994). Restructuring the classroom: Conditions for productive small groups. *Review of Educational Research*, 64(1), 1-35.
- Kollar, I., Fischer, F. & Hesse, F. W. (2006). Collaboration scripts - a conceptual analysis. *Educational Psychology Review*, 18(2), 159-185.
- Reiss, K., Heinze, A., Kuntze, S., Kessler, S., Rudolph-Albert, F. & Renkl, A. (2006). Mathematiklernen mit heuristischen Lösungsbeispielen. In M. Prenzel & L. Allolio-Näcke (Hrsg.), *Untersuchungen zur Bildungsqualität von Schule: Abschlussbericht des DFG-Schwerpunktprogramms* (S.194–208). Münster: Waxmann.
- Reiss, K., Klieme, E. & Heinze, A. (2001). Prerequisites for the understanding of proofs in the geometry classroom. In M. van den Heuvel-Panhuizen (Hrsg.), *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, S. 97–104). Utrecht: Utrecht University.
- Reiss, K. & Renkl, A. (2002). Learning to prove: The idea of heuristic examples. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 34(1), 29–35.
- Schoenfeld, A. (1983). Episodes and executive decisions in mathematical problem-solving. In R. Lesh & M. Landau (Hrsg.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (S.345–395). New York: Academic Press.
- Sweller, J., van Merriënboer, J. & Paas, F. (1998). Cognitive architecture and instructional design. *Educational Psychology Review*, 10, 251–295.
- Tabach, M., Barkai, R., Tsamir, P., Tirosh, C., Dreyfus, T. & Levenson, E. (2010). Verbal justification - is it a proof? Secondary school teachers' perceptions. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 8(6), 1071–1090.
- Weinberger, A., Ertl, B., Fischer, F., & Mandl, H. (2005). Epistemic and social scripts in computer-supported collaborative learning. *Instructional Science*, 33(1), 1-30.
- Weinert, F. (2001). Concept of Competence: A Conceptual Clarification. In F. Weinert, D. Rychen & L. Salyanik (Ed.), *Defining and Selecting Key Competencies* (S. 45-65) Göttingen: Hogrefe & Huber.