Eva MÜLLER-HILL, Köln

Mathematische Erklärung - Wissenschaftsphilosophische Konzeptionen und ihre Relevanz für die Mathematikdidaktik

1. Ausgangspunkt und Grundgedanke

Dem Interesse für den Begriff der mathematischen Erklärung und seine Rolle für die Mathematikdidaktik liegt der Gedanke zugrunde, dass Menschen und vor allem Lernende stets nach Erklärungen suchen. Mit „mathematischer Erklärung" meine ich dabei zunächst Argumente, Bilder(sequenzen), Vorstellungen und auch Handlungen zur Erklärung der Wahrheit oder Falschheit von mathematischen *Sachverhalten*.[1] Mathematische Erklärungen sollen Antworten auf „*Warum-Fragen*" innerhalb der Mathematik liefern. Erklärungen beeinflussen und strukturieren unser gesamtes, und damit natürlicherweise auch unser mathematisches Wissen. Die Gründe, warum wir im Alltag gleichwie in der Wissenschaft bestimmte Hypothesen und Theorien akzeptieren und verfechten und andere, konkurrierende zurückweisen, lassen sich in der Regel als sogenannte „Schlüsse auf die beste Erklärung", eine spezielle Form der Abduktion, für bereits akzeptierte oder beobachtungsevidente Thesen oder Theorien verstehen. Diese Schlüsse funktionieren etwa nach dem folgenden Schema (Bartelborth 2007, S. 8): *Daten + Hintergrundwissen + Hypothesenliste → beste Erklärungshypothese.* Es ist sinnvoll anzunehmen, dass auch Mathematiklernende bestimmte, vor allem allgemein-abstrakte mathematische Sachverhalte besser verstehen und akzeptieren, wenn sie als (für sie) beste Erklärungshypothese in Bezug auf bereits bekannte oder evidente mathematische Sachverhalte und Zusammenhänge erkennbar werden. Diesen Grundgedanken werde ich im Folgenden ein wenig genauer ausführen und begründen.

2. Methodologie: Fruchtbare Blicke in die Wissenschaftsphilosophie

Ein aus mathematikdidaktischer Sicht fruchtbarer Blick in die Erklärungsdebatte der Wissenschaftsphilosophie soll hier in einer exemplarischen Sichtung einer speziellen wissenschaftsphilosophischen Erklärungskonzeption, dem Anriss einer kurzen Diskussion der prinzipiellen Übertragbarkeit dieser Konzeption auf mathematikdidaktische Fragestellungen und einer ebenfalls exemplarischen konkreten Anwendung bestehen. Mit dem so nur angedeuteten umfangreicheren Forschungsprogramm sind folgende Zielsetzungen verbunden: Zu den theoretischen Zielen gehört ein *begrifflich-*

[1] Darunter können auch Begriffserklärungen fallen.

systematischer Vergleich verschiedener Konzeptionen von Erklärung, der ein theoretisch gut motiviertes begriffliches Analyse- und Rekonstruktionsinstrumentarium für Erklärungskontexte im Mathematikunterricht, aber auch eine theoretische Diagnose spezifischer potentieller Schwierigkeiten von Mathematiklernenden (z.B. auch am Übergang von Schule zu Universität) liefert. Anwendungsorientierte Ziele bestehen dann in der tatsächlichen Beschreibung und Rekonstruktion von konkret gegebenen Erklärung(skontext)en im Mathematikunterricht und in der Nutzung des gewonnenen Rekonstruktionsschemas für empirische Untersuchung, z.B. von subjektiven Erklärungsbegriffen bei Mathematiklernenden und auch -lehrenden.

3. Exemplarischer Blick in die wissenschaftsphilosophische Debatte: Erklären anhand von „nomischen Mustern"

Eine in der aktuellen wissenschaftstheoretischen Erklärungsdebatte überzeugend vertretene Konzeption versteht Erklärungen als Nachweis der Instantiierung eines nomischen, d.h. gesetzesartigen Musters durch das Explanandum unter gegebenen Randbedingungen (vgl. Bartelborth 2007, S. 83 ff.). Spezielle nomische Muster sind kausale nomische Muster:

Ein *potentiell erklärendes kausales nomisches Muster* (**NM**) ist eine Generalisierung, die einen gesetzesartigen kausalen Zusammenhang zwischen bestimmten Randbedingungen (**R**) und einem Explanandum (**E**) ausdrückt. Diese Generalisierung muss für einen bestimmten Bereich von Objekten, nicht nur für ein einzelnes Objekt, gültig sein; Bartelborth nennt dies auch „Bereichsinvarianz". Schließlich muss sie eine intrinsische, d.h. unabhängige Disposition[2] von Objekten oder auch Systemen beschreiben.

4. Prinzipielle Anwendbarkeit auf Erklären im Mathematikunterricht

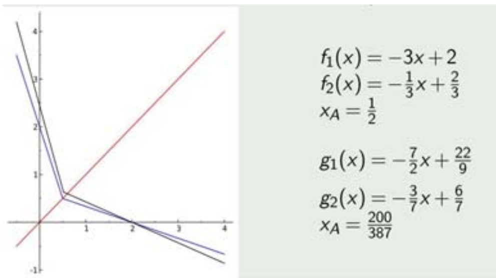
In Bezug auf die prinzipielle Anwendbarkeit der Konzeption von Erklärungen anhand (kausaler) nomischer Muster auf mathematische Erklärungen lautet die mathematikdidaktisch relevante Frage: Mit welcher Art von mathematischen Objekten, Strukturen und Theorien operieren *Mathematiklernende,* und macht es in Bezug darauf Sinn, von Dispositionen oder Kausalität zu sprechen? Es gibt mehrere gute Gründe für die Vermutung, dass das mathematische Wissen von Mathematiklernenden in der Regel von *empiri-*

[2] Eine Disposition besteht in dem mit einer bestimmten Eigenschaft eines Objekts oder Systems notwendig verbundenen deterministischen Vermögen, unter Einwirkung eines bestimmten Stimulus unter geeigneten Umständen eine weitere bestimmte Eigenschaft zu manifestieren. So löst sich etwa ein Stück Würfelzucker auf, wenn man es in eine Tasse Kaffee wirft; die Disposition ist hier die der „Wasserlöslichkeit".

schen Objekten, Strukturen und Theorien handelt. Dazu gehören etwa die Argumentation in (Struve 1990) oder Studien wie (Hanna/Jahnke 2001) und (Heinze/Kwak 2002). Für empirische Objekte, Strukturen und Theorien ist uns die Antwort auf die Frage, was ein Ereignis, ein nomisches Muster, Dispositionen oder Kausalität sein sollen, aber vertraut.

5. Beispielanalyse einer Schülererklärung

In (Sierpinska 1994, S. 88 ff.) wird eine Unterrichtssequenz mit fünf 16-jährigen Schülerinnen und Schülern (SuS) beschrieben, in der Fixpunkte von Funktionen unter anderem mit Hilfe von computeranimierter graphischer Iteration an Graphen von Beispielfunktionen, zuerst linearen, dann abschnittsweise linearen ähnlich den folgenden eingeführt werden:



Sierpinska diskutiert diese Unterrichtssequenz als „drastic example of [mistakes, wrong choices, wrong generalizations]"(S. 89) auf Seiten der SuS , verursacht durch das Arbeiten mit Beispielen. Übertragen in die oben eingeführte wissenschaftsphilosophische Terminologie liefert ihre Diskussion das Folgende (vgl. S. 90 f.): Die SuS haben ein empirisches Objekt-/Begriffsverständnis von Funktionen als Graphen und verstehen „Fixpunkt" (FP) nicht als einfache, sondern als zusammengesetzte Eigenschaft „abstoßender/anziehender FP" im Sinne einer Disposition von Kurven, die durch graphische Iteration instantiiert wird. Sie haben außerdem beobachtet, dass graphische Iteration bei linearen Funktionen, deren Graph die Gerade $x = y$ genau einmal schneidet, einen abstoßenden FP erzeugt, ein Übergang zu bestimmten abschnittsweise linearen Funktionen jedoch anziehende FPe liefert. Einige SuS bilden anhand dieser Informationen die (falsche) Hypothese, dass *nur* stückweise lineare Funktionen *wie die im Beispiel gewählten* überhaupt anziehende FPe haben, und zwar an der *Ansatzstelle* x_A, an der die beiden linearen Teilstücke zusammengefügt sind. Unter dem Gesichtspunkt der nomisch-kausalen Erklärungsfindung für das Vorliegen eines FPes lässt sich eine solche Hypothesenbildung aber auch als Schluss auf die (aus Schülersicht) beste nomisch-kausale Erklärung rekonstruieren, indem man das vermutete „nur wenn" durch einen kausal-ursächlichen Zusammenhang in Form eines nomischen Musters mit einer gewissen Fehlertoleranz und relativ kleiner Bereichsinvarianz ausdrückt:

Schülererklärung für anziehenden Fixpunkt (AFP)

E: Die gegebene Funktion hat einen AFP in (der Nähe von) x_A.

NM: Graphische Iteration bei stückweise linearen Funktionsgraphen *wie denen im Beispiel*, d.h. mit *Ansatzpunkt* (x_A/y_A) *nahe* $x = y$ *und mit etwa reziproker Steigung der beiden linearen Halbgeraden, die den Graph der Funktion beschreiben*, erzeugt einen AFP in (der Nähe von) x_A.

R: Der gegebene Funktionsgraph ist im Sinne von NM stückweise linear.

Hier kann nun konstruktiver weiter überlegt werden, wie das so erlangte Verständnis der SuS sukzessive, zunächst etwa durch die Suche nach Mustern mit größerer Bereichsinvarianz, ausgeweitet werden kann.

6. Fazit

„Didaktische" mathematische Erklärungen sollten auf das Vorwissen von Lernenden Bezug nehmen, allerdings nicht in erster Linie im Sinne einer *Reduktion* von neu zu vermittelndem auf bereits *bekanntes Wissen*. Bezug nehmen sollten sie dagegen auf *Art und Struktur* des Vorwissens in folgendem Sinne: Je nachdem, ob Lernende etwa mit empirischen oder abstrakten mathematischen Objekten umgehen, wie gut ihr mathematisches Begriffsverständnis ist, welches Verständnis der Natur einer Erklärungsbeziehung selbst vorliegt, welche Formen von Erklärung der Lernende sucht, kann eine geeignete Form der mathematischen Erklärung eingefordert oder angeboten werden. Eine Kombination von Erklärungen durch nomische Muster und dem Schluss auf die beste Erklärung liefert demnach einen für den Mathematikunterricht möglicherweise sehr fruchtbaren Ansatz: Mathematische Erklärungen, welche Lernende selbst aufstellen bzw. gut akzeptieren und verstehen, können als Schlüsse auf die beste nomisch(-kausal)e Erklärung mit geeigneter, u.a. dem aktuellen Begriffsverständnis der Lernenden angepasster Bereichsinvarianz beschrieben werden. Solche Analysen liefern Ausgangspunkte für eine konstruktive Ausweitung des vorhandenen Begriffsverständnisses und Erklärungskonzepts von Mathematiklernenden, auch mit Blick auf ein Beweisverständnis im klassischen deduktiven Sinne.

Literatur

Bartelborth, T. (2007): Erklären. Berlin: de Gruyter.

Hanna, G. & Jahnke, H. N. (2002): Another Approach to Proof: Arguments from Physics. In: ZDM 34, 1, 1 - 8.

Heinze, A. & Kwak, J. Y. (2002): Informal prerequisites for informal proofs. In: ZDM 34, 1, 9 - 16.

Sierpinska, A. (1994): Understanding in Mathematics. London: Falmer Press.

Struve, H. (1990): Grundlagen einer Geometriedidaktik. Mannheim: BI Verlag.