

Michael NEUBRAND, Oldenburg

## **Mathematikdidaktische Analysen der zentralen Prüfungen 2008 für Klasse 10 in NRW: Sechs Grundfragen der Aufgaben-Konstruktion**

Dieser Kurzbericht wirft einige „Blitzlichter“ auf ausgewählte mathematikdidaktische Grundfragen der Konstruktion und der Bearbeitung von Aufgaben. Obwohl an den zentralen Prüfungen des Jahres 2008 für die Klassen 10 der allgemeinbildenden Schulen in Nordrhein-Westfalen (ZP-10) illustriert, sollten diese Grundfragen allgemein für die Aufgabenentwicklung von Prüfungs- und Lernaufgaben gültig sein.

### **1. Rahmenbedingungen der ZP-10**

Die ZP-10 in Nordrhein-Westfalen ist differenziert nach Schulformen und nach dem angestrebten Schulabschluss, d.h. „Hauptschulabschluss“ (HSA) oder „Mittlerer Schulabschluss“ (MSA). Für das Gymnasium gab es im Jahr 2008 noch einige eigens im zweiten Prüfungsteil gestellte Aufgaben; ab 2010 nehmen die Gymnasien jedoch nicht mehr an der ZP-10 teil.

<i>Abschluss</i>	<i>Prüfungsteil 1</i>	<i>Prüfungsteil 2</i>
<b>HSA-10</b>	Hauptschule 10 Typ A, Gesamtschule Grundkurs	Hauptschule 10 Typ A, Gesamtschule Grundkurs
<b>MSA</b>	Hauptschule 10 Typ B, Gesamtschule Erweiterungskurs , Realschule, Gymnasium	Hauptschule 10 Typ B, Gesamtschule Erweiterungskurs, Realschule ..... Gymnasium

Es gibt zwei Prüfungsteile. Der erste Teil soll sog. „Basiskompetenzen“ erfassen, die – nach den Vorgaben des Ministeriums – „für einen angemessenen Umgang mit Zahlen und Größen im Alltag sowie für das vertiefte Anwenden und Betreiben von Mathematik eine besondere Rolle spielen“. Im zweiten Prüfungsteil werden sog. „komplexere Aufgaben“ gestellt, die jeweils aus mehreren verbundenen Teilaufgaben aufgebaut sind und in denen die Prozess- und Inhaltsbereiche des Kerncurriculums vorkommen sollen. Zwei Jahre vor der jeweiligen zentralen Prüfung gibt das Ministerium „Vorgaben“ heraus mit Hinweisen auf „unterrichtliche Schwerpunkte für die Vorbereitung auf die schriftliche Prüfung“. Die Vorgaben sowie (nach der Prüfung) die Aufgaben und Bewertungsanleitungen finden sich hier: <http://www.standardsicherung.schulministerium.nrw.de/zp10> .

Für mathematikdidaktische Analysen hat das Ministerium Aufgabenbearbeitungen zur Verfügung gestellt, 30 aus Gesamtschulen (Erweiterungs-

kurse) und 77 aus Gymnasien; i.a. gibt es jeweils aus einer Klasse eine Arbeit aus dem oberen, eine aus dem mittleren und eine aus dem unteren Leistungsbereich. Mit 10 Gesamtschulen und 26 Gymnasien ist dies jedoch keine repräsentative Stichprobe über ganz NRW.

## 2. Ausgewählte Grundfragen, die sich bei der Aufgabenkonstruktion stellen und die Aufgabenbearbeitung beeinflussen

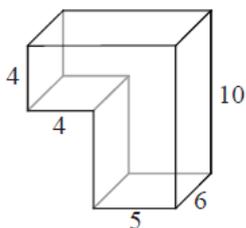
Aus den umfangreichen mathematikdidaktischen Analysen für das Ministerium (Neubrand & Neubrand, 2010) werden 6 Grundfragen für das Arbeiten an Aufgaben herausgegriffen. Die Beispielaufgaben aus der ZP-10 werden allerdings nur kurz beschrieben und nicht vollständig dokumentiert.

### 2.1. Sachwissen als zentrale Kategorie

Eine Hauptschule-Aufgabe der ZP-10 beschäftigt sich mit den Beitragssätzen der gesetzlichen Krankenversicherung. Der Text der Aufgabe erwähnt dabei diese Fachtermini: „Beitragssatz“ (und implizit, dass der Beitragssatz sich zeitlich ändern kann), „Bruttolohn“ (aber nicht Nettolohn oder Lohn generell), „Arbeitnehmer“ (aber nicht wer es ist, der „die andere Hälfte“ des Beitrags zahlt), „Zusatzversicherung“ (aber nur, dass sie bestimmte „Arbeitnehmer haben“, nicht wer dafür aufkommt). Die Aufgabe setzt also – denn die Informationen wären zu lang, um innerhalb der Aufgabe gegeben zu werden – Sachwissen über Grundzüge des deutschen Sozialversicherungssystems voraus. Ohne solches Sachwissen wären einige der gestellten Aufgaben reine sprachliche Decodierungen.

*Grundfrage 1:* Jede realitätsorientierte Aufgabe setzt Sachwissen voraus. Wie aber kann man sich dessen versichern? Wie kann der „Primat der Sache beim Sachrechnen“ (H. Winter) eingehalten werden?

### 2.2 Maßangaben könne Fehler evozieren



In einer MSA-Aufgabe wird nach dem Volumen des abgebildeten Werkstücks gefragt. Ziel der Aufgabe soll es offenbar sein, zu erfassen, ob die Schülerinnen und Schüler das Werkstück in berechenbare Teilkörper zerlegen können. Diesem Ziel haben sich die Maße unterzuordnen. In diesem Falle jedoch evozieren die Maße den Fehler, links oben einen Würfel (statt des  $4 \cdot 4 \cdot 6$ -Quaders) zu „sehen“. Tatsächlich machen nahezu alle Schülerinnen und Schüler, die die Aufgabe nicht korrekt lösen, genau diesen „Würfelfehler“.

*Grundfrage 2:* Mit der Wahl von Maßangaben kann man Fehler hervorrufen, sei es absichtlich („schau genau!“) oder unabsichtlich. Die Wahl der

Maße hat sich aber in jedem Falle dem Ziel der Aufgabe unterzuordnen. Fehler anderen Ursprungs sollten nicht sanktioniert werden.

### 2.3 *Interferenzen mit dem Erwerbskontext*

Eine Aufgabe der MSA-Prüfung hat das „Empirische Gesetz der großen Zahl“ zum Thema: Es soll eine gute Schätzung der relativen Häufigkeit, dass ein Quader auf die Seite „4“ fällt, abgegeben werden aufgrund der Daten eines Wurf-Experiments. Es gibt in der didaktischen Literatur zwei Zugänge: (a) Stabilisierung nach mehreren unabhängigen und dann immer längeren Versuchsreihen und (b) Stabilisierung innerhalb einer einzigen aber länger werdenden Versuchsreihe. Der erstgenannte Zugang ist der am häufigsten in der Schule vertretene, und innerhalb dieses Zugangs sind Mittelwertbildungen angemessen. Der zweite Zugang wird jedoch in dieser Aufgabe gewählt, und hier ist nur Ablesen des einen Wertes bei höchster Versuchszahl adäquat. In der Tat aber verwenden etwa ein Drittel der Schülerinnen und Schüler Mittelwertstrategien. Das deutet darauf hin, dass die Schülerinnen und Schüler in ihnen vertraute Begriffsbildungen zurückfallen. Die Korrekturvorgaben lassen Mittelwert-Bildungen zu.

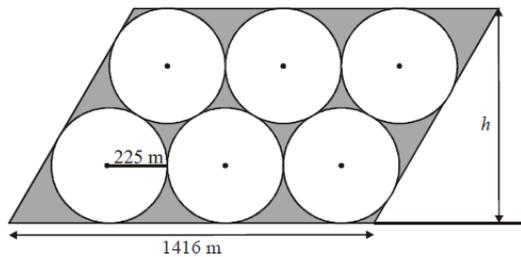
*Grundfrage 3:* Vom Standpunkt des situierten Lernens aus konstruieren Schülerinnen und Schüler den jeweiligen Gegenstand gemäß der ersten begriffsbildenden Situation (außer- und innermathematisch): „Wissen trägt den Index des Erwerbszusammenhangs an sich“ (Baumert). Bei der Aufgabenkonstruktion ist daher zu beachten, dass Zugänge die dem Curriculum und den vorherrschenden Lernmaterialien entsprechen, beachtet werden. Sonst werden für die Schülerinnen und Schüler nicht-adäquate Lösungsstrategien attraktiv, obwohl sie möglicherweise über Wissen verfügen.

### 2.4 *(Nicht-)adaptive Verhalten von Schülerinnen und Schülern*

In einer Aufgabe für den MSA wird nach der Spannweite einer Bogenbrücke gefragt, deren Bogen durch die Gleichung  $y = -0,007 \cdot x^2 + 1,3 \cdot x$  vorgegeben ist. Die Spannweite ist die  $x$ -Koordinate der nicht-trivialen Nullstelle. Offenbar ist seitens der Aufgabensteller intendiert, dass die Schülerinnen und Schüler sich adaptiv in dem Sinn verhalten, dass sie *nicht* die schematische Lösung, etwa mit der  $p$ - $q$ -Formel, verwenden. Aber nur ca. 5 % verfahren nach der hier adäquaten Produktzerlegung. Nicht-adaptive Verfahren treten vermehrt bei den leistungsstärkeren Schülern auf.

*Grundfrage 4:* Aufgaben, die auf adaptives Verhalten zielen, erreichen dies nicht von selbst. Auch bei leistungsstarken Schülerinnen und Schülern ist die bewusste Hinführung zu einem der mathematischen Situation angemessenen Anwenden allgemeiner Formeln im Mathematikunterricht immer wieder zu thematisieren.

## 2.5 Rahmung der Aufgabe: „real“ oder „geometrisch“?



Ein Aufgabe für das Gymnasium fragt zu nebenstehender Figur („ein Getreidefeld mit Bewässerungsanlagen“): „Weise nun nach, dass  $h$  tatsächlich ungefähr 840 m ist.“ Mehrere Signale in der Aufgabe deuten eine „realitätsorientierte“ Aufgabe an, obwohl die Aufgabe als geometrische Analyse der Kreis-Konfiguration intendiert ist. Tatsächlich verwenden mehr als 10 % der Schülerinnen und Schüler, und zwar vermehrt die leistungsstärkeren, realitätsnahe Schätzverfahren.

*Grundfrage 5:* Aufgaben haben eine „Rahmung“. Diese muss den Schülerinnen und Schülern klar gemacht werden, sowohl im Aufgabentext als auch im Duktus der gesamten Prüfung.

## 2.6 Umgehen mit Explikationsaufgaben

In einer für das Gymnasium gestellten Aufgabe wird verlangt, aus drei mit einem Stroboskop festgehaltenen Orten eines Basketballs zu entscheiden, ob der Wurf im Korb landet. Die Aufgabe verlangt: „Beschreibe – ohne zu rechnen – ein mögliches Vorgehen, mit dem das untersucht werden kann.“ Bei solchen Explikationsaufgaben zeigen sich unterschiedlichste Lösungen, etwa „journalistische“ Beschreibungen, Darlegungen, die nur auf Selbstverständlichkeiten rekurrieren, physikalische Fehlvorstellungen usw.

*Grundfrage 6:* Gerade bei Explikationsaufgaben kommt es auf präzise Fragestellung an. Die Ebene der gewünschten Lösung ist klar zu machen. Die Balance zwischen offener Fragestellung und der Art der gewünschten Explikation ist bei der Aufgabenkonstruktion genau zu diskutieren.

## 3 Resümee

Die Mathematikdidaktik kann zu diesen Grundfragen das Spektrum möglicher Aufgaben-Orientierungen ausloten und Kategorien bereitstellen, mit denen man sich mit Aufgabenkonstruktion und Aufgabebearbeitung auseinandersetzen kann.

## Literatur

Neubrand, J. & Neubrand, M. (2010). *Mathematikdidaktische Analysen der zentralen Prüfungen 2008 in Mathematik am Ende der Klasse 10 in Nordrhein-Westfalen: Analysen von Aufgabenstellungen und Aufgabebearbeitungen. Hinweise zu Aufgabenkonstruktion und zur Fachunterrichtsentwicklung*. Vechta, Oldenburg: Universität Vechta & Carl-von-Ossietzky-Universität / Düsseldorf: Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen. (*Interner Bericht*)