

Geometrisches Wissen in der Grundschule

1. Eigene Befunde

In einer Untersuchung im Zusammenhang mit offenen Aufgaben (Rasch 2006) baten wir Kinder der Klassenstufen 1-4 ihnen bekannte ebene und räumliche Figuren darzustellen: Zeichne Flächen und Körper, die du kennst und benenne sie. Es wurden Klassen befragt, die kontinuierlich in Geometrie unterwiesen wurden. Bei den Schulanfängern war es vor allem vorschulisches Wissen und Können, das sichtbar wurde. (Abb.1a,b)

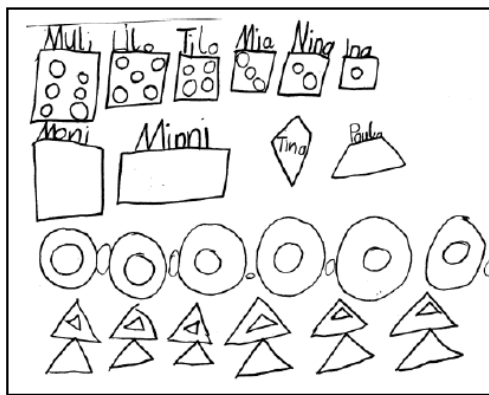


Abb. 1a: Zeichne Dreiecke, Vierecke, Kreise und Würfel. (Kl. 1)



Abb.1b: „Würfel gehen aber ganz schön schwer“

Neben erwartetem Vorwissen gab es eine Reihe von beachtenswerten Besonderheiten. So fiel auf, dass Dreiecke recht differenziert von den Schulanfängern wahrgenommen wurden: „Das ist ein Dreieck und das ist ein Langdreieck.“ Bezüglich der Vierecke waren es, wie erwartet, vor allem rechteckige Formen, die dargestellt wurden. Die Begriffe Rechteck und Quadrat gehörten bei einzelnen Kindern schon zum Wortschatz. Darüber hinaus skizzierten die Schulanfänger auch Trapeze, Drachen und Rauten, ohne diese Figuren -mit Ausnahme des „Drachens“ - benennen zu können. Den Würfel stellten die Kinder mit Selbstverständlichkeit durch die Flächen des Spielwürfels dar, ca. 98% (Stichprobe n=100) zeichneten annähernd quadratisch wirkenden Flächen mit den entsprechenden Augenzahlen. Ca. 60% dieser Kinder zeichneten alle sechs Würfelflächen (Abb. 1a), andere stellten einzelne Flächen dar. 2% der Schulanfänger zeigten eine perspektivische Darstellung des Würfels (Abb.1b). Ein Schüler, der dies besonders gut machte, wunderte sich laut über den von uns formulierten Auftrag mit dem Hinweis: „Würfel gehen aber ganz schön schwer.“ Diese Einzelleistungen sind interessant und könnten durch weitere Untersuchun-

gen genauer identifiziert werden. Beim Blick auf die Schulanfänger im insgesamt beeindruckte die differenzierte Wahrnehmung der geometrischen Grundformen Viereck, Dreieck, Kreis (Halbkreis, „Oval“). Bei der Analyse der Darstellungen der Schülerinnen und Schüler der Klassen 2 bis 4 wurde zum einen deutlich, wie das in der Schule vermittelte geometrische Wissen Fähigkeiten voranbringt. Zum anderen zeigten sich aber auch Lücken im geometrischen Wissen und Unsicherheiten, deren Ursachen mit aller Vorsicht auch auf inhaltliche und strukturelle Aspekte der Grundschulgeometrie zurückgeführt werden können. Vermisst wurde bei den Dritt- und Viertklässlern die differenzierte Darstellung von Formen. Wurden von Schulanfängern noch das Dreieck und das „Langdreieck“ unterschieden, suchte man bei den älteren Grundschulkindern vergeblich nach spezifischen Darstellungen bzw. Kenntnissen zum Dreieck. Während die Schulanfänger schon Drachenvierecke und Trapeze anboten, waren es bei den Kindern am Ende der Grundschule fast ausschließlich die rechtwinkligen Viereckformen, die dargestellt wurden. Die Repräsentation der Körper durch Flächen begegnete uns bis zum Ende der Grundschulzeit. Das Dreieck stand häufig für Pyramide, das Rechteck für Quader. Darstellungsmöglichkeiten für Körper hatten sich nur bei einzelnen Schülern weiterentwickelt.

2. Klassische Untersuchungen

Dina van Hiele-Geldorf und Pierre van Hiele (Freudenthal-Institut Utrecht) beschrieben 1957 die Entwicklung geometrischen Denkens bei Grundschulkindern. Im Ergebnis ihrer Untersuchungen stellten sie dar, wie Kinder die Grundlagen für geometrische Formen erlernen. (Franke 2009) Pierre van Hiele erklärte, dass seine Schüler Stufen erreichten, die sich durch markante Punkte beschreiben ließen. Auf der Grundlage solcher markanten Punkte konnte er fünf Niveaustufen identifizieren, von denen die ersten drei für den Geometrieunterricht der Grundschule relevant sind: Level 0: Visualization; Level 1: Analysis; Level 2: Abstraction; Level 3: Deduction; Level 4: Rigor.

Die van Hieles betonten, dass die identifizierten Denkebenen hauptsächlich ein Produkt von Erfahrung und Instruktion in Abhängigkeit vom Alter sind. Ein Kind sollte genügend Gelegenheiten für geometrische Erfahrungen haben (classroom or otherwise), um ein höheres Entwicklungsstadium zu erreichen. Durch reiche Erfahrungen können die Kinder die Niveaustufe 2 schon in der Primarstufe erreichen. (van Hiele 1959/1984)

Das analysierende Denken (Level 1), das in die Lage versetzt, Figuren nicht nur ganzheitlich sondern auch über ihre Eigenschaften differenziert

wahrzunehmen, gehört gegenwärtig neben der Entwicklung der Raumvorstellung zu den hauptsächlichen Zielen des Geometrieunterrichts. Inhalte, die mit der dritten Entwicklungsstufe, dem geometrisch-analysierenden Denken (Level 2), verbunden sind (Eigenschaften innerhalb einer Figur können in Beziehung gesetzt und Zusammenhänge zwischen Figuren erkannt werden), spielen nach unseren Beobachtungen im Geometrieunterricht der Grundschule eine geringe Rolle. Wenn man auch im Lernbereich Geometrie auf Strukturen und Muster aufmerksam machen will, sollte über eine inhaltliche Gestaltung des Geometrieunterrichts nachgedacht werden, die das Entdecken geometrischer Zusammenhänge bewusst einbezieht.

3. Geometrie lehren und lernen

Auf der Suche nach einem Zugang zur Grundschulgeometrie, der zielgerichtet den Erwerb geometrischen Wissens anstrebt und auf Zusammenhänge aufmerksam macht, legten wir die folgenden Überlegungen zugrunde. Zunächst wurde die der Geometrie innewohnende *Handlungsbezogenheit* berücksichtigt. (Radatz/Rickmeyer 1991) Damit lässt sich unter anderem die besondere Faszination des Geometrieunterrichts für Grundschulkinder ableiten. Weitere Überlegungen wendeten sich den für die Grundschule typischen Inhalten zu. Geometrische Inhalte sollten von vornherein so verknüpft werden, dass Zusammenhänge sichtbar werden. Unter dieser Bedingung wurden die Inhalte ausgewählt und zu Modulen zusammengefasst. Träger des jeweiligen Moduls ist ein Grundbaustein, eine Grundidee, an den/die Wissensbestandteile angelagert wurden. (Gallin 2010) Die Module sind klassenstufenübergreifend angelegt und können für die unterschiedlichen Jahrgänge entsprechend des Entwicklungsstandes der Kinder und der Vorgaben durch Rahmen- und Kernlehrpläne angepasst genutzt und in nachfolgenden Klassenstufen wieder aufgegriffen werden. Die Module sind teilbar und erweiterbar – auch in Abhängigkeit von den fachlichen Interessen und Vorlieben der Lehrpersonen. Die vorgeschlagene Modulabfolge muss nicht eingehalten werden. (Rasch 2012)

Beispiele:

- Geometrie 1: Faltwinkel (Gerade, Strecke, Strahl, sich schneidende Geraden, Winkel, rechter Winkel, Rechteck, rechteckige Körper, senkrechte Linien, parallele Linien, Parallelogramm)
- Geometrie 2: *Achsenkreuz* (sich senkrecht schneiden, senkrecht zueinander, rechte Winkel, Quadrat, Drachenviereck, Raute, Kreis)
- Geometrie 3: *Dreiecke mit zwei gleichlangen Seiten* (gleicher Abstand von zwei Punkten, Mittellinie, gleichschenklige Dreiecke, gleich-

schenklig rechtwinklige Dreiecke unter dem Halbkreis, Geometriedreieck)

- Geometrie 4: *Gleichseitige Dreiecke* (Linien im Dreieck; Symmetrien, Beziehungen zu Trapez, Raute, Sechseck, Parkettieren, Tetraeder, platonische Körper)

Zunächst wurden ausgewählte Module in Lehrer/innen-Fortbildungen vorgestellt und durch die Lehrpersonen evaluiert. Im Januar 2011 wurde ein Schulversuch mit ersten Klassen begonnen. Wir versuchen an die Vorerfahrungen der Schüler anzuknüpfen und neues Wissen teils experimentell, teils erklärend zu veranschaulichen.

Ausschnitt aus Geometrie 1: „Wir falten ein Stück Papier (möglichst nicht gerade umrandet) und erhalten eine *Kante*. Entlang dieser Kante kann man eine gerade Linie auf's Papier zeichnen (wird demonstriert). Solche geraden Linien nennt man *Geraden*. Geraden kann man nach beiden Seiten beliebig lang zeichnen (über die Ränder des Blattes hinaus), sie haben keinen festgelegten Anfang und kein Ende. Wenn man eine Länge genau festlegen möchte, tut man dies, indem man *Punkte* auf eine Gerade setzt. Abstände zwischen Punkten kann man genau messen. Einen solchen Abstand zwischen einem Anfangs- und einem Endpunkt nennt man auch *Strecke*...“

An eine instruktionale Einstiegsphase schließt sich eine individuelle Schülerarbeitsphase auf der Grundlage eines offenen, möglichst unspezifischen Auftrags an, z. B. „Zeichne Geraden und Strecken“. Die Schüler können dabei je nach Vermögen auf das vorher angebotene Wissen zurückgreifen. Die Ergebnisse ihrer Arbeit dokumentieren sie in eigener Regie. Sich anschließende Reflexionsphasen mit den Mitschülern sollen den Gebrauch und die Weiterentwicklung eines geometrischen Wortschatzes anregen.

Literatur

- Franke, M (2009): Didaktik der Geometrie in der Grundschule. Heidelberg: Spektrum.
- Gallin, P. (2010): Dialogisches Lernen. In: Grundschulunterricht, 57 (2), 4-9.
- Radatz, H., Rickmeyer, K. (1991): Handbuch für den Geometrieunterricht an Grundschulen. Hannover: Schroedel.
- Rasch, R. (2006): Offene Aufgaben für individuelles Lernen im Mathematikunterricht der Grundschule. Seelze: Kallmeyer.
- Rasch, R. (ersch. 2012): Geometrisches Wissen vernetzen – Geometriemodule für Kl. 1-6. Unveröffentlichtes Manuskript.
- van Hiele, Pierre M. (1959/1984): The Child's Thought and Geometry. In: D. Fuys, D. Geddes, R. Tischler (Hrsg.). English Translation of Selected Writings of Dina van Hiele-Geldorf and Pierre M. van Hiele. S. 243-252. New York: Brooklyn College.