

Katrin REIMANN, Köln

Probleme des Mathematikunterrichtes beim Übergang von Arithmetik zur Algebra

Die Algebra nimmt innerhalb der Mathematik eine zentrale Rolle ein. Sie gilt als Sprache der Mathematik und bildet somit die Grundlage zur Betrachtung und Beschreibung mathematischer Strukturen. Durch die Erweiterung der Objekte um Variablen können allgemeine Gesetze aufgestellt, funktionale Abhängigkeiten beschrieben, sowie Gleichungen hergeleitet und untersucht werden. Das Verständnis der Algebra und damit vor allem auch der richtige Umgang mit Variablen stellt die wesentliche Voraussetzung für das Verständnis der weiterführenden Mathematik dar.

1. Differenzen zwischen Arithmetik und Algebra

Um die hauptsächlichen Probleme von Schülerinnen und Schülern (SuS) bei dem Erlernen der Algebra identifizieren zu können, ist es grundlegend die Differenzen zwischen Arithmetik und Algebra im Schulunterricht zu betrachten. Die beiden Teilgebiete unterscheiden sich von einander zum einen in der Zielsetzung und zum anderen in dem Umgang mit Unbekannten (vgl. Fischer 2009). Während in der Arithmetik das Finden numerischer Lösungen im Vordergrund steht, liegt in der Algebra der Fokus auf dem Betrachten gemeinsamer Strukturen. So machen zum Beispiel algebraische Gesetze Aussagen über alle Elemente einer Menge. Diese Differenzen bedeuten einen unterschiedlichen Anforderungsgrad, der an die SuS gestellt wird.

Neben der Betrachtung der Differenzen ist es erforderlich, die Frage zu diskutieren, wo die Grenze zwischen den beiden Bereichen Arithmetik und Algebra verläuft. Herscovics und Linchevski bezeichnen diese Grenze als „cognitive gap“ (vgl. dieselben 1994). Der „cognitive gap“ stellt dabei die Unfähigkeit der SuS dar, spontan und intuitiv an und mit Unbekannten zu operieren. Demnach ist Algebra mehr als ein reines Rechnen mit Buchstaben und somit auch keine bloße Verallgemeinerung der Arithmetik. Dafür spricht ebenfalls, dass bei dem Übergang von der Arithmetik zur Algebra eine Bedeutungsveränderung der Symbole und Schreibweisen stattfindet (vgl. Malle 1993). Dies äußert sich zum einen in der so genannten Konkatenation, d.h. Hintereinanderstellung von Symbolen, und ist hier als Notations- bzw. Darstellungsproblem zu sehen. In der Arithmetik wird die Konkatenation stets als implizite Addition verstanden, wohingegen sie in der Algebra entweder als implizite Multiplikation oder als beides aufgefasst wird. Zum anderen sind sowohl Operationszeichen als auch das Gleich-

heitszeichen von der Bedeutungsveränderung betroffen, welche bei beiden von inhaltlicher Art ist. Das Operationszeichen wird in der Arithmetik als eine Aufforderung zum Handeln angesehen, es ist damit ein Aktionszeichen. In der Algebra hingegen tritt das Operationszeichen auch als Bestandteil eines Zahlnamens auf und zieht damit keine Handlung nach sich. Das Gleichheitszeichen hat in der Arithmetik die Funktion eines Zuweisungszeichens: es weist einer Aufgabe ein Ergebnis zu. Diese Bedeutung wird in der Algebra durch die Vorstellung eines Vergleichszeichens ersetzt. Es ist daher bei der Einführung der Algebra wesentlich sich diesen Problematiken bewusst zu sein und die SuS dafür zu sensibilisieren.

2. Operationen an einer Unbekannten ausführen

Wie oben angesprochen ist eine wesentliche neue Herausforderung im Algebraunterricht das Ausführen von Operationen an Unbekannten. Die Voraussetzung dafür ist, dass die Unbekannte selbst als ein Objekt der Theorie angesehen wird (vgl. Sfard 1991). Abstrakte Begriffe können auf zwei Arten aufgefasst werden, zum einen operational, d.h. als Prozess, und zum anderen strukturell, d.h. als Objekt. Die operationale Auffassung stellt beim Erlernen eines neuen Begriffes den ersten Schritt dar. Um einen Begriff als Objekt einer Theorie zu begreifen, muss nach Sfard ein Prozess von drei Schritten durchlaufen werden. Der erste Schritt ist die *Interiorization* (Verinnerlichung): hier werden Operationen mit vertrauten Objekten einer niedrigeren Stufe ausgeführt. Im nächsten Schritt, der *Condensation* (Verdichtung), wird über den Prozess als ganzes nachgedacht und eine Notation als Kryptonim für die Operation eingeführt. Der letzte Schritt ist die *Reification* (Vergegenständlichung). Hier wird die Notation als vollwertiges Objekt der Theorie betrachtet und zwar losgelöst von dem vorangegangenen Prozess. Am Beispiel der negativen Zahlen soll Sfards Prozess der Vergegenständlichung kurz erläutert werden: Die negativen Zahlen werden in der Phase der Interiorization anhand der Ausführung der Subtraktion mit natürlichen Zahlen geübt. In der Condensation wird die Notation der negativen Zahlen eingeführt. Dieser Schritt wird gefördert durch die Verknüpfung des zugrunde liegenden Prozesses mit einer weiteren rechnerischen Operation. In der Reification wird zuletzt eine ontologische Vorstellung mit der negativen Zahl verbunden. Diesen Prozess müssen die SuS auch bezogen auf die Unbekannten durchlaufen, um in der Lage zu sein, Operationen mit ihnen auszuführen.

3. Variablen als zugrunde liegendes Konzept

Variablen ermöglichen es, Beschreibungen und Voraussagen nicht mehr nur für einzelne Beispiele oder Situationen zu geben, sondern allgemein,

d.h. für eine ganze Menge von Situationen derselben Art. Sie sind Mittel der Verallgemeinerung und damit ein grundlegendes Konzept der Algebra. Schoenfeld und Arcavi beschrieben dies in folgender Weise: „Understanding the concept [of variable] provides the basis for the transition from arithmetic to algebra and is necessary for the meaningful use of all advanced mathematics.” (Schoenfeld, Arcarvi 1988, S. 420)

Eine Betrachtung der historischen Entwicklung der Algebra verdeutlicht, dass die Algebra sich schon vor dem Gebrauch von Variablen herausbildete und auch, dass sich die Verwendung der Variablen in einem langen, über tausendjährigen Prozess entwickelt hat. Deutlich wird dies besonders durch die geläufige Einteilung der Algebra in drei Phasen (vgl. Harper 1987): In der ersten, der rhetorischen Phase, wurden alle Behauptungen und Argumente nur in Worten und Sätzen verfasst. Sie wurde durch die synkopierte Phase abgelöst, in welcher einzelne Zeichen im Umgang mit algebraischen Termen benutzt wurden, jedoch traten Variablen nur für die unbekannt, gesuchten Größen auf. Die Verwendung von Buchstaben für die gegebenen Größen führte Vieta ein, was den Beginn der letzten, symbolischen Phase darstellte. In der symbolischen Phase findet eine komplette Symbolisierung statt, d.h. alle Zahlen, Operationen und Beziehungen werden durch Symbole ausgedrückt. Bei der Behandlung der Algebra in der Schule sollte dieser historische Entwicklungsprozess stärker bedacht werden und dabei auch auf die verschiedenen Arten von Variablen eingegangen werden. Denn wie eine Studie von Harper zeigt, durchlaufen die SuS beim Erlernen der Algebra analoge Phasen zu den oben Genannten.

4. Epistemologische Hindernisse

Die Geschichte der Algebra gibt einen Einblick in die Komplexität des Konzepts der Variable und der zu überwindenden Hindernisse, welche während der Entwicklung der Algebra aufkommen. Sierpinska machte darauf aufmerksam, dass sogenannte epistemologische Hindernisse existieren, welche, unabhängig von den Lernenden oder der Art der Vermittlung, beim Erwerb eines Inhaltes auftreten (vgl. Sierpinska 1992). Diese Hürden sind Teil des zu erlernenden Stoffes selbst und müssen auch von den SuS für das Verständnis der Algebra überwunden werden. Das Ziel der historischen Untersuchung ist daher vor allem das Aufspüren ideengeschichtlich bedeutsamer Konzepte, welche auf das individuelle Lernen der SuS übertragen werden können.

Neben den drei Darstellungsebenen der Algebra hat Katz noch vier unabhängige inhaltliche Phasen in ihrer historischen Entwicklung identifiziert (Vgl. Katz 2007). Zu Beginn war die Algebra rein geometrisch gerechtfertigt

tigt und entwickelte sich dann über das Lösen von Gleichungen und das Beschreiben von Kurven hin zur abstrakten Algebra. Sie war folglich nicht immer die abstrakte Wissenschaft, als die sie heute aufgefasst wird, sondern hat sich aus geometrischen Fragestellungen herausgebildet. Dies zeigt auch deutlich Eulers Auffassung von der Algebra. Für ihn war sie eine Wissenschaft, die sich auf die Realität bezog, indem sie zeigte, wie man unbekannte Größen findet. Algebra wurde somit im Kontext von empirischen Theorien entwickelt.

Die hier vorgestellten Überlegungen motivieren die folgenden weiterführenden Forschungsfragen: Wird Algebra in der Schule (unbewusst) als eine empirische Theorie vermittelt? Ist es gerechtfertigt, Algebra auf diese Weise im Mathematikunterricht einzuführen? Dabei ist der Begriff der empirischen Theorie in Bezug auf die Algebra in dem Sinne zu verstehen, dass die algebraischen Terme selbst so behandelt werden, als wären sie reale Objekte. Eine empirische Auffassung von Algebra grenzt sich damit von der Vorstellung von Algebra als formaler Sprache und auch von der durch realitätsbezogene Fragestellungen entwickelten Algebra ab.

Literatur

- Fischer, A. (2009): Zwischen bestimmten und unbestimmten Zahlen – Zahl- und Variablenauffassung von Fünftklässlern. In: *Journal für Mathematik-Didaktik* 30, S. 3 – 29.
- Harper, E. (1987): Ghost of Diophantus. In: *Educational Studies in Mathematics* 18, S. 75 – 90.
- Herscovics, N., Linchevski, L. (1994): A cognitive gap between Arithmetic and Algebra. In: *Educational studies in mathematics* 27, S. 59 – 78.
- Katz, V. (2007): Stages in the history of algebra with the implication of teaching. In: *Educational studies in mathematics* 66, S. 185 – 201.
- Malle, G. (1993): Didaktische Probleme der elementaren Algebra.
- Schoenfeld, A., Arcarvi, A. (1988): On the Meaning of Variable. In: *Mathematics Teacher* 81, Heft 6, S. 420 – 427.
- Sfard, A. (1991): On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. In: *Educational studies in mathematics* 22, S. 1 – 36.
- Sierpinska, A. (1992): On understanding the notion of function. In: Dubinsky, E. and Harel, G.: *The concept of function, Elements of Pedagogy and Epistemology*.