

Pamela REYES-SANTANDER, Augsburg, Jorge SOTO-ANDRADE¹,
Santiago de Chile

Mathematisches Denken. Grundvorstellungen und Metaphern.

Diese Arbeit versucht die von Wittenberg (1963) formulierte Frage “Was ist mathematisches Denken?” zu beantworten. Einen großen Beitrag dabei leisten die Ergebnisse der kognitiven Neurowissenschaften, die uns hilft zu verstehen, was unter neurologischem Aspekt Lernen bedeutet (Kandel, 2009). Das alleine beantwortet allerdings noch nicht die Frage, was mathematisches Denken ist (MD) oder wie wir es fördern können. Vom Standpunkt der kognitiven- und der Entwicklungspsychologie aus gesehen einerseits und aus Sicht der mathematischen Didaktik andererseits wird im Folgenden versucht das MD zu charakterisieren. Damit werden wir eine fachliche Basis erhalten, um einige Komponenten des MD beurteilen und dann entscheiden zu können, was in Mathematikstunden gefördert werden sollte.

Bei dieser Charakterisierung des mathematischen Denkens spielen die kognitiven Mittel oder Werkzeuge, die die Individuen zur Kommunikation ihrer Kenntnisse mitbringen, eine grundlegende Rolle (Sfard, 2001). Dazu gehören neben Repräsentationen, Metaphern und Analogien, so glauben wir, auch die Grundvorstellungen (vom Hofe, 1995, 1998). Unter Metaphern verstehen wir hier konzeptionelle Metaphern (Lakoff & Nuñez, 2000; Soto-Andrade 2006, 2007a). Andererseits findet die grundlegende Theorie der Situationen von Brousseau (1998) Anwendung, die die Entstehung von mathematischen Begriffen und Verfahren bei der Schülern zu fördern versucht.

1. Mathematisches Denken

Unter dem Begriff Denken versteht man eine aktive innere Beschäftigung mit sprachlichen Begriffen, bildlichen Vorstellungen und anderen mentalen Inhalten mit dem Ziel, neue Erkenntnisse zu gewinnen. Denken steht häufig im Dienste zielorientierter Handlungen, die nicht als automatisierte Routinen verfügbar sind (Funke, 2006, S. xxiii).

¹ vom Centro de Investigación Avanzada en Educación, Universidad de Chile (PBCT-CONICYT, Project CIE-05) unterstützt.

Jeder Mensch kann mathematisch denken, dass es durch Widersprüche, Spannungen und Überraschungen hervorgerufen wird, dass es durch Unterrichtspraxis mit Inhalten zum Nachdenken verbessert wird (Mason, Burton & Stacey, 1982). Lesh und Kelly (1994) sehen das MD im Konstruktivismus begründet und aus dem Denken entsteht ein Sinn in den Begriffen. Was jedoch der Kern des MD ist, aus welchen Komponenten es sich zusammensetzt und was beachtet werden muss um es zu fördern, soll im Folgenden geklärt werden.

Die Kognitive Psychologie liefert die folgenden Beiträge: Wahrnehmung, Aufmerksamkeit, Gedächtnis, Sprache (Hayes, 1995), Planung, Problemlösen (Engel, 1998), usw. Die Didaktik der Mathematik trägt mit den folgenden Konzepten bei: Kommunikationsmittel oder Arten Konzepte zu erzeugen/speichern, wie z. B. die Grundvorstellungen, Metaphern, die Semiotische Repräsentation (Duval, 2004), Theorie der Situationen (Brousseau, 1998), mathematische Strategien (Engel, 1998), Aufmerksamkeit (Mason, 1989) und Sfardsche commognition (Sfard, 2008); Teile der Entwicklungspsychologie wie kreative, künstlerisch-visuelle und repräsentative Fähigkeiten, numerische Fähigkeit, Wort-, Raumverständnis und Linguistische-, logisch-mathematische Fähigkeit (Gardner, 1983). Auch werden die Fähigkeiten, die der Mensch auf Grund der Evolution schon inne hat, wie z.B. der Sinn der Zahl, begutachtet (Dehaene, 1999). Mit diesen Konzepten erhält man eine Annäherung an das, was MD ist: Mathematisches Denken bezeichnet kognitive Prozesse (neurobiologische), die die Fähigkeiten und Kenntnisse verbindet; sie bilden sich heraus, wenn man in neuen, interessanten und herausfordernden Situationen ist, die mit mathematischen Inhalten verbunden sind. Das MD benutzt verschiedene Kommunikationsmittel wie z.B. mentale Bilder, semiotische Repräsentationen, Grundvorstellungen und Metaphern. Das MD wird durch konzeptionelle Metaphern verwirklicht (Soto-Andrade, 2007b).

Das MD wird durch die folgenden Faktoren charakterisiert: Wahrnehmung des Objekts, (mathematik-) inhaltsbezogenes Denken (Ulm, 2010), Strategien oder Prozeduren und nicht-rationale Prozesse. Zur Art und Weise, wie diese mit verschiedenen kognitiven Arten interagieren, werden die Vorschläge von Flessas and Lussier (2005) betrachtet.

Die *Wahrnehmung* bezieht sich auf die Annäherung des Individuums an die Situation, wie z. B. dynamisch, statisch, Gleichheit, etc. *Prozeduren* sind die, die auf automatische Art und Weise bei der Problemlösung ablaufen, die nicht mehr als einen kognitiven Prozess benötigen. Bsp. Algorithmen. *Strategien* bilden sich, wenn man ein gesuchtes oder aufgetretenes Problem versucht zu lösen. Diese involvieren eine größere Anzahl kognitiver Pro-

zesse und dienen der Erweiterung unserer konzeptionellen Karten wie zum Beispiel Umstrukturierung, Modellierung, Analogieprinzip, das Extremalprinzip, etc.

Das mit *mathematischen Inhalten verbundene Denken* besteht aus: numerischem-, algebraischem-, geometrischem-, stochastisches-, funktionalem Denken. Man betrachtet es als einen Teil einer durch schulisches Lernen hervorgerufenen konzeptionellen Karte die mit dem Gedächtnis verbunden sind.

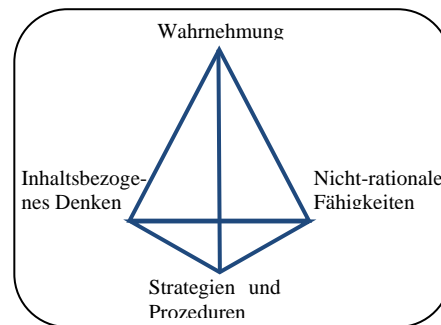


Fig. 1: Komponenten des MD

Die *nicht-rationalen Fähigkeiten* haben in unserem Glauben und täglichen Leben ihren Ursprung. Sie haben eine direkte Verbindung zu unserer Kultur, unserem Umfeld, unseren Emotionen und unserer Wahrnehmung. Beispiele: Intuition, Kreativität, Flexibilität, Sensibilität, Fantasie, usw. Die vier Komponenten interagieren untereinander. Die Kommunikationsmittel, wie beispielsweise Strategien zu speichern oder wiederherzustellen geschieht anhand von Repräsentationen, Grundvorstellungen und Metaphern.

2. Empirischer Teil

Dazu werden einige Teile der Gruppentheorie als Beispiele betrachtet, bei denen sich einige Elemente dieser Faktoren mittels zweier Kommunikationsmittel des mathematischen Denkens, der Metapher und der Grundvorstellung, aufzeigen lassen. Es wurden in der Untersuchung drei Fragen gestellt: Welche Elemente des MD erscheinen in der Arbeit mit Gruppentheorie? Welche Elemente des MD werden verwirklicht oder können in einem Essay erkannt werden? Welche Elemente des MD werden verwirklicht oder können in der Realisierung eines Mathe-Tagebuchs erkannt werden?

Zur Beantwortung der ersten Frage wurde ein Fragebogen entwickelt, den 137 Studenten des Proseminars Algebra der Universität Augsburg in den Jahren 2008 – 2010 beantworteten. Zur zweiten Frage wurde mit Schülern aus dem Gymnasium Sonthofen und des Gymnasium Stetten Institut Augsburg gearbeitet, wobei in beiden Fällen ein Essay realisiert wurde. Die dritte Frage wurde mit Lehramtsstudenten aus dem Proseminar Algebra an der Universität Augsburg verwirklicht, wobei die Studenten Mathetagebücher zur Erstellung und Lösung algebraischer Problemstellungen, unter Beachtung der vier Komponenten des MD, schreiben durften.

Literatur

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble: La pensée sauvage.

- Dehanae, S. (1999). *Der Zahlensinn oder warum wir rechnen können*. Basel: Birkhäuser.
- Duval, R. (2004). *Semiosis y Pensamiento Humano, Registros Semióticos y Aprendizajes Intelectuales*. Cali: Universidad del Valle.
- Engel, A. (1998): *Problem-Solving Strategies*. New York: Springer.
- Flessas, J., & Lussier F. (2005). *La neuropsychologie de l'enfant*. Paris: Dunod.
- Funke, J. (2006): *Enzyklopädie der Psychologie*. Serie II Kognition, Band 8 Denken und Problemlösen. Göttingen: Hogrefe Verlag für Psychologie.
- Gardner, H. (1983): *Estructuras de la mente. La Teoría de las Inteligencias Múltiples*. Séptima reimpression en español (2008). Mexico: Fondo de la cultura económica.
- Hayes, N. (1995). Kognitive Prozesse - eine Einführung. In J. Gerstenmaier (Hrsg.), *Einführung in die Kognitionspsychologie*. München: Ernst Reinhardt Verlag. 11-40.
- vom Hofe, R. (1995). *Grundvorstellungen mathematischer Inhalte*. Heidelberg: Spektrum akademischer Verlag.
- vom Hofe, R. (1998). On the generation of basic ideas and individual images: normative, descriptive and constructive aspects. In A. Sierpiska & J. Kilpatrick (Eds.). *Mathematics Education as a Research Domain: A search for identity*. Great Britain: Kluwer Academic Publishers.
- Kandel, E.R. (2009): *Auf der Suche nach dem Gedächtnis – Die Entstehung einer neuen Wissenschaft des Geistes*, 2. Auflage. München: Siedler Verlag.
- Lakoff, G., & Nuñez, R. (2000). *Where Mathematics comes from?* New York: Basic Books.
- Lesh, R. & Kelly, A. (1994). Action-theoretic Approaches to Research in Mathematics Education: Studies Involving Continuously Developing Experts. In R. Biehler, R. Scholz, R. Sträßer, & B. Winklemann. (Eds.). *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Mason, J.; Burton, L. & Stacey, K. (1982). *Thinking mathematically*. London: Addison-Wesley.
- Sfard, A. & Kieran, C. (2001). Cognition as communication: Rethinking learning-by-talking through multi-faceted analysis of students' mathematical interactions. *Mind, Culture, and Activity*, 8(1), 42-76.
- Sfard, A. (2008). *Thinking as Communicating. Human Development, the Growth of Discourse, and Mathematizing*. Cambridge: University Press.
- Soto-Andrade, J. (2006). Un monde dans un grain de sable: Métaphores et analogies dans l'apprentissage des maths. *Ann. Didactique Sciences Cogn.*, 11, 123– 147.
- Soto-Andrade, J. (2007a). Metaphors and cognitive styles in the teaching-learning of mathematics. In D. Pitta-Pantazi, & J. Philippou (Eds.). *Proceedings CERME 5* (pp. 191-200). Retrieved May 21, 2008, from <http://ermeweb.free.fr/CERME5b/>
- Soto-Andrade, J. (2007b). La cognición hecha cuerpo florece en metáforas..., in A. Ibañez, & D. Cosmelli, (Eds.). *Nuevos Enfoques de la Cognición : Redescubriendo la dinámica de la acción, la intención y la intersubjetividad*. Santiago: Universidad Diego Portales. 71-90.
- Ulm, V. (2010). *Mathematische Begabungen fördern*. Berlin: Cornelsen Scriptor.